様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月２１日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007～2009
課題番号：19540136
研究課題名（和文）　密度依存型の拡散項をもつ反応拡散方程式の解の分岐構造

研究課題名（英文）　Bifurcation structure of stationary solutions for a reaction-diffusion system with density-dependent diffusion

研究代表者
観音　幸雄（KAN-ON YUKIO）
愛媛大学・教育学部・教授
研究者番号：00177776

研究成果の概要（和文）：　競争関係にある２種の個体群密度の動態を記述する密度依存型の拡散項をもつ反応拡散系（２種競争系）を扱い，生物の住処をある球の内部としたときの球対称定常解の解構造を調べた．定数定常解のまわりでの局所的な解構造は，第１種ベッセル関数を用いたある積分値の符号によって決定することができる．本研究では，数学的手法と数値的検証法により，住処の次元が３以下の場合にその符号を調べた．得られた研究成果は，２種競争系だけでなく，一般の反応拡散系における定数定常解のまわりでの局所的な解構造においても有効である．

研究成果の概要（英文）：　We consider a competition-diffusion system with the density-dependent diffusion, which describes the dynamics of the population density for a two competing species community, and we study the bifurcation structure of radially symmetric stationary solutions of the system for the case where the habitat of the community is the inside of a certain ball. At this time, the local bifurcation structure around the constant stationary solution can be determined by the value of the integral whose integrand is the cubic of the Bessel function of the first kind with the positive weight function. In this research, when the dimension of the habitat is not bigger than 3, we determine the sign of the value of the integral by employing the mathematical method and the numerical verification method. The result of this research is applicable for determining the local bifurcation structure around the constant stationary solution to not only the competition-diffusion system but also the reaction-diffusion system.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：応用数学，数理モデル

１．研究開始当初の背景

重定・川崎・寺本(1979)によって提出された競争関係にある２種の個体群密度の動態を記述する反応拡散系（以下では，２種競争系という）

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u = \varepsilon d_u \Delta\left[(1+\alpha v)u\right] + u(1-u-cv), \\ \frac{\partial}{\partial t}v = \varepsilon d_v \Delta\left[(1+\beta u)v\right] + v(1-bu-v), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x\in\Omega, \quad t>0, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu}v = 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t>0 \end{cases}$$

を用いて，定常解や周期解などの解構造を調べることにより，生物の共存メカニズムを理解しようとしている．ここで，変数u，vは個体群密度を意味するので，各(t,x)に対して$u(t,x)>0$，$v(t,x)>0$をみたす正値解に着目する．パラメータα，βは非負定数であり，その他のパラメータは正定数である．２種の住処Ωは滑らかな境界$\partial\Omega$をもつ$\mathbf{R}^1$の有界領域であり，νは$\partial\Omega$における外向き単位法線ベクトルである．

変数変換$w=(1+\alpha v)u$，$z=(1+\beta u)v$は第１象限からそれ自身への全単射であることに注意すると，この変換により，２種競争系は

$$\begin{cases} \Phi_{11}(w,z)\frac{\partial}{\partial t}w + \Phi_{12}(w,z)\frac{\partial}{\partial t}z \\ \qquad = \varepsilon d_u \Delta w + f(w,z), \\ \Phi_{21}(w,z)\frac{\partial}{\partial t}w + \Phi_{22}(w,z)\frac{\partial}{\partial t}z \\ \qquad = \varepsilon d_v \Delta z + g(w,z), \quad x\in\Omega, \quad t>0, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}w = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu}z = 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t>0 \end{cases}$$

の形に書き直すことができる．$\alpha>0$または$\beta>0$のときには$\Phi_{12}\neq 0$または$\Phi_{21}\neq 0$となり，２種競争系は通常の反応拡散系（$\Phi_{12}\equiv 0$，$\Phi_{21}\equiv 0$）よりも強いカップリングをしており，生物学的だけでなく，数学的な観点からも興味深い方程式である．また，$\alpha=\beta=0$の場合（以下では，古典的な２種競争系という），ある順序関係に関して比較定理が成り立つことが知られている．したがって，パラメータα，βにより，比較定理が成り立つ反応拡散系から，一般の反応拡散系へと変換できることに注意したい．

単独の反応拡散方程式の場合には，比較定理やエネルギー関数などを用い，定常解の存在・安定性を調べることにより，大域的アトラクタを決定することができる．このことは，時刻tに関する解の詳細な漸近挙動を理解するという観点から，２種競争系の定常解や周期解を含む解構造を調べることは非常に重要な問題であることを示唆している．

２種競争系は多くの研究者によって盛んに研究されてきている．研究代表者によるこれまでの研究で，Ωを有界区間とした古典的な２種競争系については，定常解の解構造がほぼ解明されている．つまり，パラメータα，βに関する２種競争系の解構造を考える場合，その出発点である古典的な２種競争系の解構造がほぼ分かっていることに注意したい．しかしながら，２種競争系に対して，現在適切な解決方法が見つかっていないために，定常解の存在・安定性，解構造などに関して多くの未解決問題が残されている．

２．研究の目的

生物の共存メカニズムを理解する際には安定な定常解や周期解の存在が重要な役割を演じる．岸本・ワインバーガ(1985)の結果から，Ωが凸領域の場合には，古典的な２種競争系の非定数定常解は不安定であることが知られている．このことから，２種競争系の非定数定常解は安定ではない場合があることが予想されるため，パラメータがある値のときに，定常解の存在を示しただけでは生物の共存メカニズムを理解することは困難である．しかしながら，パラメータに関する解構造を調べることができれば，共存メカニズムの理解が進むと思われる．また，Ωが高次元空間内の有界領域の場合には，単独の反応拡散方程式であっても，時刻tに関する解の漸近挙動を数学的に調べるのは困難であるため，数値計算や数値的検証法などの数値解析的な手法を十分に活用して，２種競争系の解の時間大域的挙動を把握する必要がある．以上のことから，次のような目的を研究開始当初に設定した．

(1) 変数変換$w=(1+\alpha v)u$，$z=(1+\beta u)v$により，２種競争系の定常問題は一般の反応拡散系のそれに変換されることを考慮して，最初の段階として，古典的な２種競争系の非線形項を一般化した反応拡散系の解構造を調べる．

(2) 生物は２次元または３次元空間内で生活を営んでいることを考慮して，生物の住処がある球の内部である場合を考察する．このとき，例えば解を球対称定常解に制限をした最も単純な場合であっても，それらの空間的な様相が特定できておらず，定常解の解構造については未解決の部分が多い．したがって，どのような解が存在し，その解がどのような挙動を示すかを数学的にまたは数値的に調べる．

３．研究の方法

本研究では主に，Ω を中心が原点，半径が π の球の内部とし，古典的な２種競争系の非線形項を一般化した反応拡散系において球対称正値定常解の解構造を考察した．実際に，$\mathbf{w}=(w,z)^T$，

$$D=\mathrm{diag}(d_u,d_v),\ K(w,\lambda)=-w''-\frac{\lambda-1}{r}w'$$

とおき，ロトカ・ヴォルテラ型の比較的単純な非線形項 $\mathbf{f}(\mathbf{w})=(f(\mathbf{w}),g(\mathbf{w}))^T$，

$$f(\mathbf{w})=w(1-w^n-cz^n),$$

$$g(\mathbf{w})=z(1-bw^n-z^n)$$

を仮定し，ε に関する問題

$$\text{(SP)}\quad \begin{cases}\varepsilon DK(\mathbf{w},\lambda)=\mathbf{f}(\mathbf{w}), & r\in(0,\pi),\\ \mathbf{w}'(0)=\mathbf{0}, \quad \mathbf{w}'(\pi)=\mathbf{0}\end{cases}$$

の解構造を調べることにした．ここで，n は実数値パラメータである．(SP) は $n=1$ の場合には古典的な２種競争系，$n=2$ の場合にはギンツブルグ・ランダウ方程式の定常問題に帰着されることに注意したい．

問題 (SP) の定数解として，$(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$ および，$\max(b,c)<1$ または $\min(b,c)>1$ のとき正値で一意的な $\hat{\mathbf{w}}$ がある．最大値原理より，

(a)　$b<1\le c$ または $c<1\le b$ のとき，(SP) は正値解をもたない，

(b)　$\max(b,c)<1$ のとき，(SP) の正値解は $\hat{\mathbf{w}}$ のみである，

ことが示せる．つまり，$\min(b,c)>1$ のとき，(SP) に非定数正値解が存在する可能性がある．したがって，$\min(b,c)>1$ の場合に，$\lambda\ge1$ および $\varepsilon>0$ を連続パラメータとして (SP) の解構造を考察した．

ノイマン境界条件のもとでの $K(\cdot,\lambda)$ の固有値を $\{\lambda_k(\lambda)\}_{k\ge0}$ とし，$\phi_k(r,\lambda)$（$k\ge0$）を固有値 $\lambda_k(\lambda)$ に対する $K(\cdot,\lambda)$ の固有関数とする．一般性を失うことなく，各 $k\ge0$ に対して $\lambda_k(\lambda)\le\lambda_{k+1}(\lambda)$，$\phi_k(0,\lambda)=1$ が成り立つことを仮定してよい．このとき，$\lambda_1(\lambda)>0$ であり，$\phi_k(r,\lambda)$ は $\lambda=1$ のとき $\phi_k(r,\lambda)=\cos kx$ と，$\lambda>1$ のとき

$$\phi_k(r,\lambda)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\lambda_k(\lambda)}\,r}{2}\right)^{\frac{2-\lambda}{2}}J_{\frac{\lambda-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda_k(\lambda)}\,r\right)$$

と表現できる．ここで，$\Gamma(z)$ はガンマ関数，$J_\nu(z)$ は第１種ベッセル関数である．

$$\Phi(\lambda,k,m)=\int_0^\pi\phi_k(r,\lambda)^m r^{\lambda-1}dr$$

とおくと，上記の表現から，任意の $k\ge1$，$\lambda\ge1$ に対して $\Phi(\lambda,k,2)>0$ が，任意の $k\ge1$ に対して $\Phi(1,k,3)=0$ が成り立つ．

各 $\lambda\ge1$ に対して，

$$\det(\lambda_1(\lambda)D-\mathbf{f}_{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{w}}))=0$$

をみたす要素が正の 2×2 対角行列 D を任意にとる．$\mathbf{v}$ および $\mathbf{v}^*$ をそれぞれ連立方程式

$$\left(-\lambda_1(\lambda)D+\mathbf{f}_{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{w}})\right)\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

および

$$\left(-\lambda_1(\lambda)D+\mathbf{f}_{\mathbf{w}}(\hat{\mathbf{w}})^T\right)\mathbf{v}^*=\mathbf{0}$$

の非自明な解とする．ただし，A^T は行列 A の転置行列である．各 $k\in\mathbf{N}$ に対して，

$$\hat{\varepsilon}_k(\lambda)=\frac{\lambda_1(\lambda)}{\lambda_k(\lambda)}$$

とおき，$\mu\to0$ のとき

$$\varepsilon=\hat{\varepsilon}_k(\lambda)+\mu\tilde{\varepsilon}_{k,1}(\lambda)+\mu^2\tilde{\varepsilon}_{k,2}(\lambda)+O(\mu^3),$$

$$\mathbf{w}=\hat{\mathbf{w}}+\mu\phi_k(r,\lambda)\mathbf{v}+\mu^2\tilde{\mathbf{w}}_{k,2}(r,\lambda)+O(\mu^3)$$

と表現される解を考え，それを (SP) に代入し分岐理論を用いると

$$\tilde{\varepsilon}_{k,1}(\lambda)=\frac{(\mathbf{f}_2(\mathbf{v},\mathbf{v}),\mathbf{v}^*)\Phi(\lambda,k,3)}{\lambda_k(\lambda)(D\mathbf{v},\mathbf{v}^*)\Phi(\lambda,k,2)}$$

が得られる．ここで，$\mathbf{f}_2(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)$ は $\mathbf{w}=\hat{\mathbf{w}}$ における $\mathbf{f}(\mathbf{w})$ の２階微分から得られる双線形写像である．したがって，定数解 $\mathbf{w}=\hat{\mathbf{w}}$ のまわりでの解構造を決定するためには，$\lambda=1$ の場合には $\tilde{\varepsilon}_{k,1}(\lambda)=0$ であるから $\tilde{\varepsilon}_{k,2}(\lambda)$ の符号を，$\lambda>1$ の場合には $\Phi(\lambda,k,3)$ の符号を調べる必要がある．本研究では主に，$\Phi(\lambda,k,3)$ の符号の解析に焦点を当て，その研究を行った．

４．研究成果

(1)　２種競争系の解構造に関する研究

この研究では，分岐理論や比較定理などの数学的手法と，数値計算や数値的検証法などの数値解析的手法を相互補完的に用い，パラメータ ε，λ および n に関する解構造を調べた．

生物の住処が区間（$\lambda=1$）の場合には，*Mathematica* の記号計算機能を用いて，$\tilde{\varepsilon}_{k,2}(\lambda)$ を具体的に計算し，その計算結果に *Mathematica* の区間演算機能を適用して，

(a)　$\lambda=1$ のときには，$n=1$ または $n\ge2$ ならば，すべての $k\in\mathbf{N}$ に対して $\tilde{\varepsilon}_{k,2}(1)<0$ である，

ことを数値的に検証することができた．また，$\lambda>1$ の場合には，$\Phi(\lambda,k,3)$ を数値的に検証しなければならない λ の範囲を理論的に特定した後に，$J_\nu(z)$ のマクローリン展開を用い，$\Phi(\lambda,k,3)$ を理論的に下から評価し，その評価式に *Mathematica* の区間演算機能を適用して，

(b)　すべての $1<\lambda\le3$，$k\in\mathbf{N}$ に対して $\Phi(\lambda,k,3)>0$ である，

ことを数値的に検証することができた．$\lambda>3$ のときの $\Phi(\lambda,k,3)$ の符号の検証については，今後の研究課題として残されている．

(2)　燃焼モデルの解の挙動に関する研究

圧縮性ナビア・ストークス方程式に対する

時間大域解の存在と，解の時間大域的挙動について研究を行った．特に，燃焼モデル方程式に対する初期値境界値問題について研究を行った．なお，この研究は研究開始当初には計画されていなかったものである．

平行平板間内において，温度変化を伴う圧縮性反応気体の運動を記述する偏微分方程式系に対して，初期値境界値問題を考察し，定常解の一意存在，時間大域解の存在，定常解への漸近，漸近の速さなどについて詳しく解析を行った．その結果，化学反応強度を表す式に現れる反応次数の総和が重要な指数であることが明らかになった．実際に，反応次数の総和を m とするとき，初期値に対する適当な条件のもとで，次の結果が得られた．

(a) 定常解は一意に存在する．
(b) $0 < m \le 2$ のとき，解は H^1 ノルムで一様に有界である．
(c)(i) $0 < m \le 1$ のとき，解は定常解へ H^1 ノルムで指数的に漸近する．
(c)(ii) $1 < m \le 2$ のとき，解は定常解へ H^1 ノルムで $O(t^{-1/2(m-1)})$ の速さで漸近する．

なお，上記の結果は初期値の大きさには依存しない．さらに，(c)(ii)の漸近オーダーの改善を試みた．部分的な結果として，空間一様な（時間のみに依存する）解は，時間無限において $O(t^{-1/(m-1)})$ の速さで 0 に漸近することが示された．したがって，この解との差を考察することにより，(c)(ii)の漸近の速さの精密化が期待されるが，今後の研究課題として残されている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① 観音幸雄，２種競争系の解構造について，応用数理 19 (2009), pp. 2-13, 査読有

②Shigenori Yanagi, Asymptotic Behavior of the Solutions for One-Dimensional Equations of a Viscous Reactive Gas, Japan J. Indust. Appl. Math. 25 (2008), pp. 99-116, 査読有

③ Yukio Kan-on, A note on bifurcation structure of radially symmetric stationary solutions for a reaction-diffusion system, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 15 (2008), pp. 1-15, 査読有

④Yukio Kan-on, Bifurcation structure of positive stationary solutions for a Lotka-Volterra competition model with diffusion. I. Numerical verification of local structure, J. Comput. Appl. Math. 201 (2007), pp. 317-326, 査読有

⑤ Yukio Kan-on, On the bifurcation structure of positive stationary solutions for a competition-diffusion system, Asymptotic analysis and singularities ― elliptic and parabolic PDEs and related problems, 601-612, Adv. Stud. Pure Math., 47-2, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, 査読有

〔学会発表〕（計８件）

①Yukio Kan-on, On bifurcation structure of radially symmetric stationary solutions for a reaction-diffusion system, NCTS(TPE) and TIMS Joint PDE Seminar, 2010.3.26, National Taiwan University

② 観音幸雄，反応拡散系の球対称定常解の解構造について，ミニワークショップ「反応拡散系をめぐる最近の話題」, 2010.2.20, 京都産業大学

③観音幸雄，２種競争系の定常解の大域的な分岐構造について，京都駅前セミナー，2009.11.27, キャンパスプラザ京都

④観音幸雄，反応拡散方程式の球対称定常解の分岐構造について，日本数学会秋季総合分科会，2008.9.27，東京工業大学

⑤観音幸雄，反応拡散方程式の定常解の分岐構造とその数値的な検証について，日本応用数理学会年会，2008.9.18，東京大学

⑥観音幸雄，Lotka-Volterra 競争モデルの定常解の大域的な分岐構造について，ミニワークショップ「数理生態モデルをめぐる諸問題－Lotka-Volterra 系を中心として―」，2008.2.23，京都産業大学

⑦柳重則，Asymptotic Behavior of the Solutions to the One-Dimensional Equations of a Viscous Reactive Gas，日本数学会秋季総合分科会，2007.9.23，東北大学

⑧柳重則，Asymptotic Behavior of the Solutions to the One-Dimensional Equations of a Viscous Reactive Gas，第 33 回発展方程式研究会，2007.9.6，中央大学

６．研究組織

(1)研究代表者

観音　幸雄（KAN-ON YUKIO）
愛媛大学・教育学部・教授
研究者番号：00177776

(2)研究分担者

柳　重則（YANAGI SHIGENORI）
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：10253296

坂口　茂（SAKAGUCHI SHIGERU）
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号：50215620
（2007 年度）

(3)連携研究者
坂口　茂 (SAKAGUCHI SHIGERU)
広島大学・工学研究科・教授
研究者番号：50215620
(2008 年度～2009 年度)