

平成21年 5月15日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540137

研究課題名 (和文) 確率微分方程式モデルの統計的漸近理論とその応用

研究課題名 (英文) Statistically asymptotic theory for stochastic differential equations and its applications

研究代表者

内田 雅之 (UCHIDA MASAYUKI)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授

研究者番号：70280526

研究成果の概要：離散観測に基づく確率微分方程式モデルの統計的漸近理論について研究し、その応用としてエルゴード性をもつ拡散過程モデルに対する統計的モデル評価規準(赤池型情報量規準)の構成及びその理論的正当化を行った。また、統計モデルとして仮定した確率微分方程式が真のモデルを含むとは限らない場合(misspecified case)について、疑似尤度関数を構成し、疑似最尤推定量の漸近的性質を示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：統計数学

1. 研究開始当初の背景

確率微分方程式は確率解析だけではなく、数理ファイナンスや金融工学などの経済学への応用においても、標準的な数学モデルとなった。また、計算機の発展に加え、膨大な金融データが入手可能となっている今日では、確率微分方程式モデルの統計推測理論が重要視されている。確率微分方程式の統計的モデリングとして、エルゴード性をもつ拡散過程(以下、エルゴード的拡散過程と呼ぶ)や微小拡散をもつ拡散過程(以下、微小拡散過

程と呼ぶ)などがある。データのタイプは連続的に観測される連続パスデータと離散的に観測される離散観測データの2種類がある。連続パスデータに基づいた確率微分方程式の1次の統計的漸近理論は、現在までに完成度の高い研究が報告されている。高次漸近理論についても吉田朋広氏がマリアバン解析を用いて漸近展開の正当性を証明して以来、その方面での研究が活発になされている。確率微分方程式モデルの評価規準については、内田雅之と吉田朋広氏により、一般的な

フレームで研究されている。しかしながら、実際問題として連続パスデータを得ることはできないので、応用上重要なのは離散観測データである。離散観測データによる確率微分方程式の統計的推測の研究については、エルゴード的拡散過程や微小拡散過程等の具体的な連続時間確率過程における統計推測理論に関する幾つかの研究がなされているものの、十分に整備されているとは言えない。さらに、統計的モデル評価規準についてはあまり研究されていないのが現状である。

2. 研究の目的

高頻度データに基づいた確率微分方程式の統計的漸近理論の整備及び統計的モデル選択のための情報量規準の構成を行う。

(1) 統計的モデル評価については赤池弘次氏によって考案された赤池情報量規準(AIC)を用いるのが標準的手法の1つである。本研究では、拡散過程モデルに対するAIC型情報量規準の構成及びその理論的正当化を目標とし、そのための統計的漸近理論の整備を行う。

(2) AICは真のモデルを含む場合(パラメトリックモデル)に対する情報量規準であるが、竹内啓氏は真のモデルを含むとは限らない場合(ミススペシフィケーションモデル)に適用可能な竹内情報量規準(TIC)を導出した。本研究では、エルゴード的拡散過程モデルが真のモデルを含むとは限らない場合の統計的漸近理論の研究を行う。

(3) 得られた理論的結果に対して数値実験(シミュレーション)を行い、漸近的なパフォーマンスを調査する。

3. 研究の方法

(1) 高頻度でかつ長時間観測された離散データに対して、確率微分方程式により定義されるエルゴード的拡散過程モデルを仮定して、そのドリフトパラメータと拡散係数パラメータの同時推定を行う。ただし、仮定した拡散過程モデルは(データが従っている)真の拡散過程を含んでいるとは限らない以

下2つの状況を考えて。

- ① 真のドリフトを含んでいるとは限らないが、真の拡散係数を含んでいる場合(semi-misspecified case),
- ② 真のドリフトを含んでいるとは限らず、さらに真の拡散係数を含んでいない場合(completely misspecified case).

仮定した拡散過程モデルが真の拡散過程を含んでいる場合はcorrectly specified caseと呼ばれるのに対して、①や②の場合はmisspecified caseと呼ばれる。エルゴード的拡散過程がcorrectly specified caseであれば、局所正規近似に基づいた擬似最尤推定量が良い推定量であり、さらにドリフトパラメータの推定量より、拡散係数パラメータの推定量の方が早く収束することが知られている。そこで、①と②の場合についても、correctly specified caseと同じ近似尤度関数を用いて擬似最尤推定量を構成する。そして、連続観測データに対する最尤推定量の漸近理論を参考にして、擬似最尤推定量の漸近的性質を証明する。

(2) エルゴード的拡散過程モデルに対するAIC型情報量規準の構成及びその理論的正当化を目標とする。AICは尤度解析及び最尤推定量に基づいた情報量規準であるが、離散観測データに基づいた確率微分方程式モデルの場合、一般には尤度関数(推移密度関数)を厳密に求めることができないため、AICの構成及びその理論的正当化は簡単な問題ではない。一般にAICの理論的正当化には、① 漸近有効推定量の大偏差不等式及びモーメントの収束、② 尤度関数のパラメータに関する3次までの導関数の一様モーメントの存在が必要となる。①については、厳密な尤度関数の代わりに、オイラー・丸山近似に基づいた局所ガウス近似による擬似尤度関数を考える。この擬似尤度関数から得られる擬似最尤推定量は漸近有効であり、その大偏差不等式及びモーメントの収束がすでに知られている。しかし、②については、厳密な尤度関数のパラメータに関する導関数についてモーメントの一様な評価をしなければならず、これにはマリアバン解析が有効であると予想される。上述した①と②を示すことによって、擬似対数尤度関数に基づいた情報量規準の差が、厳密な対数尤度関数を用いて構成したAIC型情報量規準の差と(期待値の意味で)漸近同等であることを証明する。

4. 研究成果

(1) エルゴード的拡散過程から得られる離散データを用いて、統計モデルが

① semi-misspecified case,

② completely misspecified case

の場合について、ドリフトパラメータと拡散係数パラメータの同時推定を行った。まず①について、擬似最尤推定量の一致性及び漸近正規性を証明した。また、その収束率はcorrectly specified caseと同様になることがわかった。次に、②についても擬似最尤推定量の一致性及び漸近正規性を示し、さらに拡散係数パラメータの推定量の収束率はドリフトパラメータの推定量の収束率と同様になることがわかった。つまり、拡散係数を含んでいない場合 (completely misspecified case) においては、拡散係数パラメータの擬似最尤推定量は、真の拡散係数を含んでいる場合 (correctly specified case) に比べて収束が遅くなるという新たな知見を得た。また計算機実験によって、提案した擬似最尤推定量の漸近的挙動が得られた理論と合致することが確認された。本研究は東京大学の吉田朋広氏との共同研究である。

(2) エルゴード的拡散過程から得られた離散観測データを用いてモデル選択のためにAIC型情報量規準を構成し、その理論的正当化を行った。既存のAICは正則条件の下で、平均対数尤度の漸近不偏推定量となるが、本研究では2つの統計モデルにおけるAIC型情報量規準の差が平均対数尤度の差に対する漸近不偏推定量になることを証明した。

(3) 計算機実験によって、提案したAIC型情報量規準がエルゴード的拡散過程の変数選択及びモデル選択に機能的であることを確認した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Uchida, M. Estimation of a drift parameter for a small diffusion process. (in Japanese). Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics (In press), 15 ページ, 2009, 査読有。

② Iacus, S. M., Uchida, M. and Yoshida, N. Parametric estimation for partially

hidden diffusion processes sampled at discrete times. Stochastic Processes and their Applications, 119, 1580-1600, 2009, 査読有。

③ Uchida, M. Statistical inference for diffusion processes from discrete observations. (in Japanese). Sugaku, 60, 368-379, 2008, 査読有。

④ Uchida, M. Approximate martingale estimating functions for stochastic differential equations with small noises. Stochastic Processes and their Applications, 118, 1706-1721, 2008, 査読有。

⑤ Uchida, M. Parametric estimation for stochastic differential equations. (in Japanese). Statistical Sciences in the 21st Century III, (eds. G. Kitagawa and A. Takemura), 179-206, University of Tokyo Press, Tokyo, 2008, 査読有。

[学会発表] (計 5 件)

① Uchida, M. Asymptotic property of AIC for discretely observed ergodic diffusions, 研究集会「確率解析と統計的推測 III」, 2008年11月27日, 東京大学

② Uchida, M. Estimation for discretely observed ergodic diffusions under completely misspecified models, 日露共同研究プロジェクト研究集会, 2008年11月4日, 広島大学

③ Uchida, M. Estimation for misspecified diffusion processes from discrete observations, Workshop on Statistical Methods for Dynamical Stochastic Models, 2008年6月26日, University of Padova, Italy

④ Uchida, M. Approximate martingale estimating functions for stochastic differential equations with small noises, 研究集会「確率解析と統計的推測」, 2007年11月30日, 東京大学

⑤ 内田 雅之 Estimation for misspecified ergodic diffusion processes, 日露共同研究プロジェクト研究集会「確率的複雑系に対する漸近理論とその応用の研究」, 2007年8月8日, 大阪大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内田 雅之 (UCHIDA MASAYUKI)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授
研究者番号：70280526