様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21　年　5　月　22　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007　～　2008
課題番号：19540138
研究課題名（和文）　流れ問題の解適合細分有限要素法コードの開発

研究課題名（英文）　Development of a finite element code with adaptive mesh refinement for flow problems

研究代表者
鈴木 厚　　（ ATSUSHI SUZUKI ）
九州大学・大学院数理学研究院・助教
研究者番号：60284155

研究成果の概要：
非圧縮流れの基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式で記述される三次元流れ問題において，少ない計算量で高解像度の計算を実現できる計算コードを開発した．ナビエ・ストークス方程式の物質微分項に特性曲線による近似を適用して時間微分の近似を行うことで時間発展の各ステップで線形のストークス方程式を解く．領域全体での高解像メッシュを用いることなく，流れが急激に変化する領域において有限要素分割を細分することで効率的な計算を行う事ができる．三次元ストークス方程式は大規模計算となるが，部分構造反復法を改良することで効率的な並列計算が可能になった．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：解適合細分・階層型有限要素・特性有限要素法・部分構造反復法・縁取り直接解法

１．研究開始当初の背景
有限要素法は三次元問題においては，多面体領域を四面体あるいは六面体の要素の集合として取り扱うため，実問題に非常に近い形状の領域での計算が可能である．偏微分方程式を表す弱形式を離散化して得られる方程式を解くことにより数値解を得るが，その効率的な求解には係数行列成分をなんらかの形で記憶する事が必要になる．これには非常に多くのメモリーが必要であり，現実の物理現象や工学的応用での三次元の問題では 100 万節点以上の離散点で流速と圧力の未知数に関する方程式系を解くためには数値計算アルゴリズムの工夫が必要である．

２．研究の目的
非圧縮流れの基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式で記述される三次元流れ問題において，なるべく少ない計算量で高解像度の計算を実現できるアルゴリズムを開発することが目的である．ナビエ・ストークス方程式の物質微分項に特性曲線による近似を適用して時間微分の近似を行うことで時間発展の各ステップで線形のストークス方程式を解くアルゴリズムが得られる．この際，領域全体での高解像メッシュを用いることなく，流れが急激に変化する領域において有限要素分割を細分することで計算の効率化を図る．

３．研究の方法
大規模問題のための有限要素法による数値

計算プログラムの開発においては， 有限要素法の持つ特徴の一つであるモジュール性を生かした手法が一般的である．詳しくは，有限要素メッシュ生成， 弱形式の要素毎での積分と総和による剛性行列生成， 得られた係数行列を連立方程式サブルーチンにより求解することのモジュールに分けられる．特に連立方程式の解法サブルーチンはより汎用的なルーチンであり有限要素法の剛性行列の特徴である疎行列のデータ構造を扱うことのできるものは存在するが， これは要素細分に対応したデータ構造ではない．一方要素細分はその構成法から二分木などのデータ構造により記憶される事が多い．動的に変化するデータ量を記憶する事にはうまく対応するがデータのアクセスに間接参照を多用することになるため高速計算には馴染まない．大規模演算を行うためには通常の配列を用いる必要がある．また， 境界条件を扱うためには剛性行列のデータを修正するサブルーチンを用意する必要があり， 三次元問題においては煩雑なプログラム構成になってしまう．既存の工学計算コードで用いられる手法から離れて， 有限要素法の数学的枠組みに直接従い全節点自由度から境界データを満たす部分集合への射影を用いる方法をとることにする．既存のサブルーチンを統合してコードを作成するのではなく，メモリーの使用量と計算の高速性を両立するようなデータ構造を導入してコードを作成する．

４．研究成果

(1)流れ問題の基礎方程式のナビエ・ストークス方程式は流体の粘性による運動を記述する拡散項と，流れに沿う運動を記述する移流項を含む．拡散項は線形の現象であり， 移流項は流体それ自身との相互作用を含むため非線形の現象である．数値計算においてはこの移流項を近似する操作は簡単ではなく，離散点の数が少なく解像度が十分でないと解が振動してしまう．流れの速度が速くなると相対的に粘性が低下して，移流が支配的となり流れは複雑になり， 境界層などを生み出す．これらの現象を観察する数値シミュレーションコードを開発することが目的であるため， 移流卓越の状況でも十分な近似をおこなう事のできる手法を選択する必要がある．移流項において流れの方向を考慮した離散化手法が必要となるが，これは上流化手法と呼ばれ，二つの手法がある．一つ目は有限要素法の弱形式に付加項を追加し，流れの上流方向の情報を取り込むものであり，安定化有限要素法と呼ばれる．二つ目は時間発展項と移流項をまとめて物質微分項(ラグランジアン微分項)と見なし，その近似を行う特性曲線法である．前者はプログラムの追加修正は小規模であるが，数値解を得るための連立一次方程式の係数行列は非対称となり，高速計算のためには非対称行列を扱う大規模線形ソルバーの高速化が必須となる．後者は得られる連立方程式の係数行列は対称となり，少ないメモリー量で高速な計算が可能な共役勾配法を用いる事ができる．しかしながら，特性曲線法では図に示すように，時間ステップを一つさかのぼると，流れの上流方向に引き戻しをした要素は現在の時間ステップでの要素と複雑な重なりを持つことになる．この形状判定の計算は煩雑なため，従来の計算コードでは数値積分公式による近似計算をおこなっている．しかし，この数値積分近似計算は不安定性を引き起こすことが知られており，特性有限要素法が普及していないことの一因となっている．

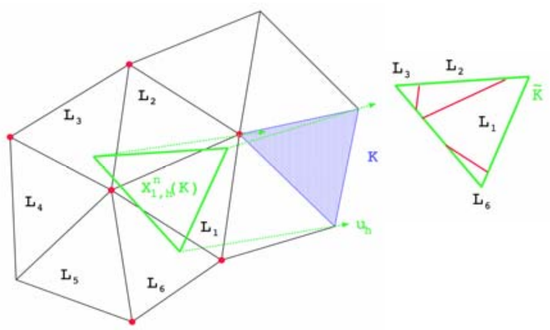

図１： 上流要素と未知データを保持する要素との重なり

本研究では有限要素に区分一次要素(P1 要素)を用いるため，有限要素補間した 1 ステップ前の流速に対し，上流要素を探索し流速場を評価するアルゴリズムは数値積分誤差無しに構築できる．図は二次元での三角形要素の重なりを示しているが，区分一次要素を用いるため，流れに沿ってこの三角形を上流方向に引き戻しても要素の各辺は線分で構成される．従って三角形同士の重なりを考えることになるが，積分値のみを求めればよいことに着目し，三角形を三つの半平面の共通部分として表す事で，再帰的に計算することができる．重なりの形状そのものは扱わないので三次元でも同様に計算できる．

(2) 解適合要素細分の構成要素である要素細分操作に粗い要素による領域要素分割の要素隣接関係を細かい要素による分割での要素隣接関係に継承するアルゴリズを開発した．要素細分法は二分法に基づくものが多く用いられている．三角形あるいは四面体の辺の中点に新たな節点を配置する事で要素の細分を行う手法である．この手法による有限要素法プログラムパッケージ に A.Schmidt と K.G. Siebert によるALBERTA がある．二分法による要素細分法は二分木によるデータ構造によ

り効率よく記憶され，二次元，三次元に共通した手続きを用いることができ，実装は比較的容易である．しかしながら有限要素法プログラムの構成要素の一つである剛性行列の計算とは独立しており，ALBERTA では要素細分が行われる毎に剛性行列の要素全てを再計算ている．

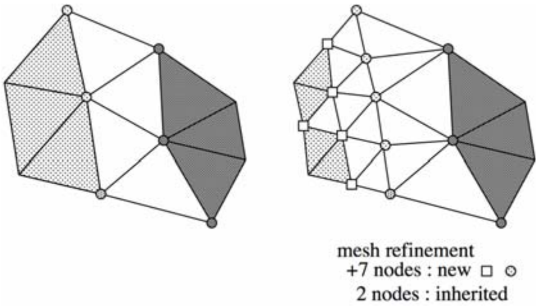

図2 ： 三角形要素と遷移領域での要素分割

本研究では図2に示す様にある要素をなるべく多くの合同な部分領域に分割するアルゴリズムを採用した．二次元の場合，三角形は4個の小三角形に分割されるが，中心のものを除き残り3個は元の要素と合同で大きさは1/2である．三次元の場合，四面体は4個の合同な小要素と新しい4個の要素に分割される．三角形/四面体一次要素では辺あるいは面の内部に節点を置く事ができないので図2に示すように粗い要素による分割の領域と細かい要素による分割の領域の間に遷移的な領域を設定する事になる．二次元では遷移領域での要素分割方法は一種類であるが三次元では細かい領域に面で接するか辺で接するかの違いにより二種類の分割方法を用意する必要がある．図3に示すように面で接する場合は四分割，辺で接する場合は二分割になる．

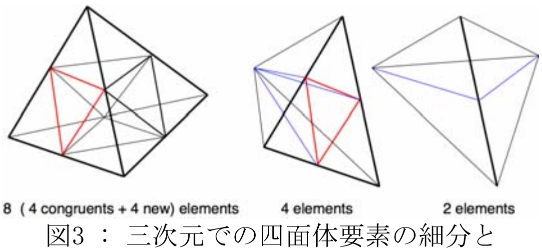

図3 ： 三次元での四面体要素の細分と細分遷移領域での二種類の分割要素

この分割アルゴリズムでは要素細分領域の内部では，節点同士の関係は粗い要素での関係を継承することができる．有限要素法では剛性行列は有限要素基底関数の勾配同士の積をそれぞれの要素で積分する事によって要素剛性行列を生成し，着目する節点を含む要素に渡って足し合わせることにより得られる．要素細分後の剛性行列の変更は次のようになる事がわかる．図4に示すように粗い要素のある節点の周りの節点は細分後には1/2の距離に移動している．この際，要素剛性行列は要素の合同性からその値は不変である．したがって粗い要素の節点を継承する節点に関しては細かい要素の上での積分を新規に計算する必要はなく，剛性行列の値を継承することができる(図4において節点番号3の周辺節点)．

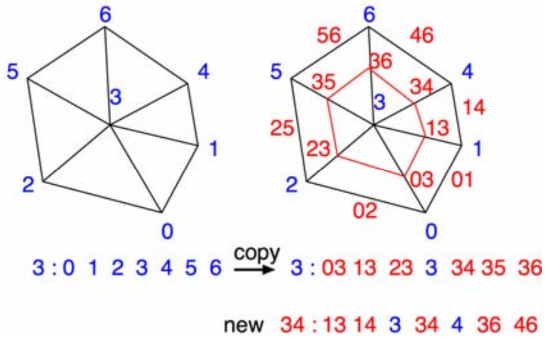

図４： 二次元での三角形要素での隣接節点関係と要素細分後隣接節点関係

細かい要素で新規に追加された節点と遷移領域に接する節点においては要素剛性行列を計算する(図4において節点番号34の周辺節点)．この計算は，通常の計算では剛性行列を生成後に破棄してしまう要素剛性行列を全て記憶することで，新規に生じた細分要素のみでの計算へと省力化できるが，三次元問題では新規に生じる細分要素の個数が多く，また要素数も多いので，省力化を図らず細分要素の計算をする方法を採用した．

(3) 流れ問題全体ではナビエ・ストークス方程式を解く必要があるが，特性曲線有限要素法を用いるため，ナビエ・ストークス方程式の非線形項である移流項は物質微分項として処理され，各時間ステップではストークス方程式を解く事に還元される．ストークス方程式を流速・圧力ともにP1要素を用いて近似する．非圧縮性は流体の制約条件として扱われるため，流速・圧力に同じ近似精度の要素を用いると可解性が満たされないが，安定化有限要素法を用いることで収束性が保証された解を得ることができる．

有限要素法の並列計算手法に部分構造反復法がある．このアルゴリズムは弾性体問題向けに開発されてきたが,ストークス方程式を効率よく解くよう改良した．内部自由度を消去したあとの不定値問題に共役勾配法を適用し，その前処理に剛体運動自由度と圧力不定性から粗空間を構成する平衡化処理を採用した．安定化手続きが，粗空間での可解性を保証することを示した．これは圧力変数部分の符号を取り替えることにより，行列の強圧性を示すことができたことによる．部分問題ソルバーには一般化逆行列による連

立方程式解法が必要であるが，ラグランジュ乗数を付加して行列を拡張することで，直接法により求解できる．有限要素節点毎の流速３成分と圧力をまとめた 4×4 ブロック分解を採用することで軸選択が不要になり効率的なアルゴリズムが得られた．

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Suzuki, A., An iterative substructuring method for the discretized Stokes equations by a stabilized finite element method, to appear in Proceedings of ALGORITMY 2009, 査読有, 18, 41-50, 2009.

② Suzuki, A., An iterative substructuring solver for the Stokes equations, to appear in Proceedings of the First International Conference on Parallel, Distributed and Grid Computing for Engineering, B.H.V. Topping and P. Ivanyi, (eds.), Civil-Comp Press, 査読有, 90, P37/1-P37/11, 2009.

③ 鈴木 厚, ストークス方程式に対する平衡化前処理付き領域分割法, 計算工学講演論文集, 査読無, 12, 2007, 833-834.

④ Suzuki, A., Tabata, M., Finite element matrices in congruent subdomains and some techniques for practical problems, Domain Decomposition Methods: Algorithms and Practice, F. Magoules ed., Civil-Comp Press, 査読有, accepted, 総ページ数 37.

〔学会発表〕（計 11 件）

1. Suzuki, A., A balancing domain decomposition method with congruent subdomains for the Stokes equations, Seminarie Equations aux derives partielles, Institute de Recherche Mathematique Anancee, Universite de Strasbourg, 2009 年 3 月 24 日, Strasbourg, France.
2. Suzuki, A., An iterative substructuring method for the discretized Stokes equations by a stabilized finite element method, ALGORITMY 2009: 18th Conference on Scientific Computing Vysoke Tatry－Podbanske, Slovakia, 2009 年 3 月 17 日, Slovakia.
3. Suzuki, A., An iterative substructuring algorithm with congruent subdomains, Workshop on Numerical Methods, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 2009 年 1 月 19 日, Paris, France.
4. Suzuki, A., Preconditioned conjugate gradient solver for the Stokes equations, Necas Seminar on Continuum Mechanics, Charles University in Prague, 2009 年 1 月 5 日, Czech Republic.
5. Suzuki, A., An iterative substructuring algorithm with congruent subdomains, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008, 2008 年 9 月 3 日, Takachiho, Miyazaki, Japan.
6. 鈴木 厚, ストークス方程式に対する部分構造反復法の高速実装, 第 13 回計算工学講演会, 2008 年 5 月 21 日, 仙台市民会館.
7. Suzuki, A., A fast domain decomposition solver for the Stokes problems, Mini workshop on advanced mathematical and computational methods, Czech Technical University in Prague, 2008 年 3 月 10 日, Czech Republic.
8. 鈴木 厚, 合同名部分領域分割による有限要素方程式解法, 応用数学合同研究集会, 2007 年 12 月 18 日, 龍谷大学.
9. Suzuki, A., Parallel finite element solver for the Stokes equations, DMHF2007: COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality, 2007 年 10 月 4 日, Fukuoka Recent Hotel, Japan.
10. 鈴木 厚, ストークス方程式の平衡化前処理付き領域分割法ソルバー, 日本応用数理学会 2007 年度年会, 2007 年 9 月 15 日, 北海道大学.
11. Suzuki, A., A 3-D implementation of characteristic Galerkin method with P1-interpolation, INSF2007: International Conference on Recent Developments of Numerical Schemes for Flow Problems, 2007 年 6 月 29 日, Kyushu University, Japan

６．研究組織

(1)研究代表者
鈴木 厚(ATSUSHI SUZUKI)
九州大学・大学院数理学研究院・助教
研究者番号：60284155

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし