様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月１６日現在

機関番号：17104
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2010
課題番号：19540139
研究課題名（和文）確率Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法の研究

研究課題名（英文）Runge-Kutta methods for stochastic differential equations

研究代表者
小守　良雄（KOMORI YOSHIO）
九州工業大学・大学院情報工学研究院・助教
研究者番号：20285430

研究成果の概要（和文）：ノイズ項をもった常微分方程式の数値解法について考察した．このような解法では一般にたくさんの（擬似）乱数を生成し，関数の計算を何回も行う必要がある．本研究では，これらの総数が比較的少なく，高精度の数値解法を導出した．また，数値計算では数値計算誤差が生じるので，その影響を受けにくい数値解法が望まれる．本研究では，そのような解法で，高精度の数値解法も導出した．

研究成果の概要（英文）：We have considered numerical methods for ordinary differential equations with noise terms. In general, such methods need a large number of (pseudo-) random numbers and a large number of evaluations of the diffusion coefficients in the equations. In this research subject, numerical schemes with high precision have been proposed in which the sum of the both numbers is smaller than existing schemes need. Incidentally, because numerical calculations cause numerical errors, methods less influenced by the errors are desirable. Such methods with high precision have been also proposed.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2007 年度 | 600,000 | 180,000 | 780,000 |
| 2008 年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 2009 年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 2010 年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 総　計 | 2,100,000 | 630,000 | 2,730,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：数値数学

１．研究開始当初の背景

d 次元の確率微分方程式の解過程を X(t) (0<=t<=T) と書き，$R^d$ 上の実数値関数を f とする時，f(X(T)) の期待値 E[f(X(T))] を求める問題を考える．この期待値は偏微分方程式の解として記述できるので，次元 d が十分に低いなら偏微分方程式の数値解法が使える．しかし，そうでないなら急激な計算量の増大によりそれらの解法で計算するのは困難である．なぜなら，差分法にしろ，有限要素法にしろ，d の増加に伴って，最終的に解かなければならない線形方程式の次元が爆発的に増大するからである．

一般に，様々な数値計算の問題において，モンテカルロ法は次元の増大による困難を克服するのに大変有効である．したがって，上で述べた問題に対しても，確率微分方程式を直接解くモンテカルロ的な手法が有効だと思われる．そこで，本研究では，弱い意味の近似を与える確率 Runge-Kutta (SRK)

法を考える．
　弱い意味の SRK スキームは，上で述べた期待値の近似を与える．つまり，離散時刻 $t_n$ ($1<=n<=N$) における $X(t_n)$ の近似解を $X_n$ と書き，ステップ幅を $h=t_n-t_{n-1}$ で表すと，f に適当な滑らかさを仮定するとき $|E[f(X(T))]-E[f(X_N)]|=O(h^p)$ ($h->0$) が成立する．ここで，p は Weak オーダーであり，近似解の収束の速さを示す．よって，大きな p を達成する SRK スキームを作成すればよい．
　研究開始当初，乗法的ノイズを含む確率微分方程式に対して，導関数を含まない，弱い意味の SRK 法の研究が盛んになりつつあった．或る可換条件の下で Weak オーダー 2 の SRK スキームが，Rossler (2004) や本研究代表者(2007) によって提案され，可換条件が成立しない一般の確率微分方程式に対しても Weak オーダー 2 の SRK スキームが，本研究代表者 (2007) によって提案された．これらの SRK スキームは Wiener 過程の増分に対応する確率変数だけを用いて構成されており，それまでの SRK スキームと比べて構造が単純であり，より発展的な解法であった．

## ２．研究の目的

　本研究の目標は，本研究代表者 (2007) によって提案された SRK 族を基に様々な SRK 法を考察し，SRK スキームを充実させることである．研究開始当初の目的としては，以下のようなことを念頭に置いた．

(1) Stratonovich 型確率微分方程式に対して Weak オーダー 2 で，平均二乗の意味で A-安定な陰的 SRK スキームを導出する．
(2) Stratonovich 型確率微分方程式に対して，構造が単純な Weak オーダー 3 の SRK スキームを導出する．
(3) ドリフト係数についてのみ陰的である準陰的 SRK スキームや diagonally 陰的 SRK スキームを導出し，それらの性質を明らかにする．
(4) その他，所用の誤差に応じて離散時間の刻み幅を自動的に制御する適応型 SRK スキーム，誤差を最小にする Weak オーダー 2 の SRK スキーム，数値安定性に優れた陽的 SRK スキームなど様々な SRK スキームを導出する．

## ３．研究の方法

　「研究目的」欄に挙げた課題に以下の手順で取り組んだ．

(1) 関連文献を取り寄せ，他の研究者による研究成果を参考にしながらアイディアを練る．
(2) アイディアに基づいて，期待した通りの性質を持つ SRK 法が理論的に得られるかどうかを考察する．もし得られるようであれば，具体的に SRK スキームを作成し，数値実験によってその評価を行う．もし得られないようであれば，あるいは，数値実験による評価が良くなければ，再考する．
(3) 研究協力者に連絡をとり，ディスカッションを行う．このように考察，計算，ディスカッションを通じて，試行錯誤を繰り返しながら研究を進める．
(4) 学会発表に応じて途中結果をまとめる．また，その際，研究計画を見直す．計画通りにうまく進まなかった研究課題は変更する．
(5) 最終的に良い成果が得られた場合は，研究成果を論文にまとめ，論文誌に投稿する．

## ４．研究成果

(1) Wiener 過程が 1 次元である Stratonovich 型確率微分方程式に対して陰的な SRK 法を考え，Weak オーダー 2 で，平均二乗の意味で A-安定な SRK スキームを導出した．この成果は論文⑤で発表した．一方，Wiener 過程が多次元である確率微分方程式に対して，Weak オーダー 2 の SRK 法を考えると，たとえ陰的であっても解法の段数を低くできないことがわかった．この為，計算コストの点で現実的な解法は得られないだろうと判断し，この研究はここまでで終えた．

(2) Wiener 過程が多次元である Stratonovich 型確率微分方程式に対して，ドリフト係数についてのみ陰的な SRK 法を考え，Weak オーダー 1 で，平均二乗の意味で A-安定な SRK スキームを導出した． この成果は論文④で発表した．一方，Weak オーダー 2 のものについては，A-安定な SRK スキームの導出に至っていない．

(3) 本研究代表者 (2007) は，非可換な Stratonovich 型確率微分方程式に対して Weak オーダー 2 の SRK スキームを提案したが，このスキームには，拡散係数それぞれにおける計算コストが Wiener 過程の次元に比例して増加するという欠点があった．この欠点を克服した SRK スキームを導出し，数値実験によってその有効性を示した．この研究成果を論文①にまとめた．
　論文①に載せた数値実験結果を次に示す．ここでは，10 次元の Wiener 過程をもつ確率微分方程式の近似解の軌道を 256,000,000 本シミュレーションし，或る時刻における 4 次モーメントの近似値を求め

た．

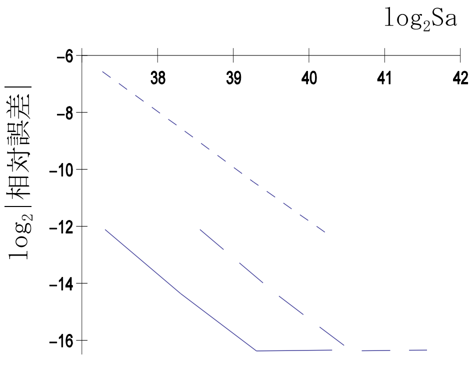


図 1：或る時刻における 4 次モーメントに対する相対誤差

図 1 において，Sa はシミュレーションで生成した擬似乱数の総数と関数の総計算回数の和を示す．また，点線は Rossler (2007) の SRK スキーム，ダッシュは本研究代表者 (2007) の SRK スキーム，実線は論文①で提案した SRK スキーム，それぞれによる計算結果を表す．これより，論文①の SRK スキームは最も少ない計算コストで最も精度の高い計算結果を与えたことがわかる．

(4) 常微分方程式に対する Chebyshev 法 (Runge-Kutta 法の一種) を拡張し，Weak オーダー 2 の陽的 SRK スキームを導出した．本スキームは陽的な解法であるから計算コストが低い．その一方で，本スキームは拡張された数値的安定領域を持つので，ドリフト係数の固有値が負の実軸周りに分布する問題に対して効果的である．4 段の SRK 法から 104 段の SRK 法まで，解法のパラメータ値を計算し，数値実験を行い，研究成果を論文②にまとめた．

数値実験結果を次に示す．ここでは，放物型偏微分方程式にノイズ項を加えた確率偏微分方程式を取り上げ，空間方向に離散化して得られる確率常微分方程式を考える．近似解の軌道を 256,000,000 本シミュレーションし，或る時刻における平均と分散の近似値を求めた．

図 2 において，h は時間方向の刻み幅を表す．点線は Abdulle と Cirilli (2008) の SROCK スキーム，実線は論文②で提案した SROCK2 スキーム (SRK スキームの一種)，それぞれによる計算結果を表す．太い線は分散，細い線は平均に関する計算結果を表す．数値実験で扱ったのは，ドリフト係数の固有値が大きな負の実部をもつ確率 (常) 微分方程式である．したがって，数値的に解きにくい．しかし，それでもなお我々の SROCK2 スキームは大きな刻み幅で数値的安定に高い精度の計算を行ったことがわかる．

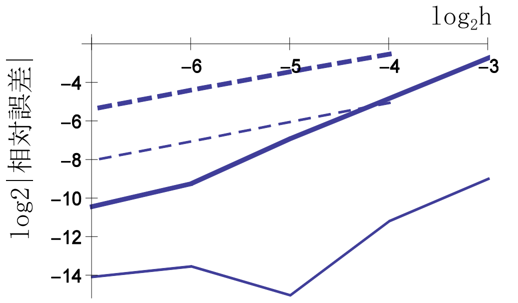


図 2：或る時刻における平均と分散に対する相対誤差

5．主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)


① Yoshio Komori and Kevin Burrage, Supplement: efficient weak second-order stochastic Runge-Kutta methods for non-commutative Stratonovich stochastic differential equations, in press in Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 査読有. (http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2011.04.021)

② Yoshio Komori and Kevin Burrage, A stochastic method for all seasons, Technical Report CSSE-36, Faculty of Computer Science & Systems Engineering, Kyushu Institute of Technology, 2010, 査読無.

③ Kevin Burrage and Yoshio Komori, Explicit Stochastic Runge-Kutta Methods with Large Stability Region, AIP Conference Proceedings, Vol. 1281, pp. 2057-2060, 2010, 査読有.

④ Yoshio Komori, Weak order drift-implicit Runge-Kutta methods for stochastic differential equations, AIP Conference Proceedings, Vol. 1048, pp. 319-323, 2008, 査読有.

⑤ Yoshio Komori, Weak first- or second-order implicit Runge-Kutta methods for stochastic differential equations with a scalar Wiener process, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 217, pp. 166-179, 2008, 査読有. (http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2007.06.024)


〔学会発表〕(計 7 件)

① Kevin Burrage and Yoshio Komori (発表者), Explicit stochastic Runge-Kutta methods with large stability regions, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2010, 2010 年 9 月 23 日, Hotel Rodos Palace, Rhodes, Greece.
② 小守良雄 (発表者), Kevin Burrage, 大きな安定領域をもつ陽的確率ルンゲ・クッタ法, 日本応用数理学会 2010 年度年会, 2010 年 9 月 6 日, 明治大学駿河台キャンパス.
③ Kevin Burrage, 小守良雄 (発表者), 硬い確率微分方程式に対するチェビシェフ法, 日本応用数理学会 2009 年度年会, 2009 年 9 月 30 日, 大阪大学豊中キャンパス.
④ Kevin Burrage and Yoshio Komori (発表者), Weak order Chebyshev methods for stiff stochastic differential equations, International Conference on Scientific Computational and Differential Equations 2009, 2009 年 5 月 29 日, Beijing Friendship Hotel, Beijing, China.
⑤ Yoshio Komori, Weak order drift-implicit Runge-Kutta methods for stochastic differential equations, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2008, 2008 年 9 月 17 日, Kypriotis International Conference Center, Kos, Greece.
⑥ 小守良雄, Drift-implicit 確率 Runge-Kutta 法について, 日本応用数理学会 2007 年度年会, 2007 年 9 月 17 日, 北海道大学工学部.
⑦ Yoshio Komori, Fully implicit stochastic Runge-Kutta methods for stochastic differential equations with a scalar Wiener process, International Conference on Scientific Computational and Differential Equations 2007, 2007 年 7 月 12 日, Le Palais du Grand Large, Saint-Malo, France.

〔その他〕
http://galois.ces.kyutech.ac.jp/~komori/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
小守　良雄 (KOMORI YOSHIO)
九州工業大学・大学院情報工学研究院・助教
研究者番号：20285430

(2)研究協力者
Kevin Burrage
オックスフォード大学・コンピューティングラボラトリー・教授