

平成 22 年 6 月 8 日現在

研究種目：基盤研究 (C)  
 研究期間：2007 ~ 2009  
 課題番号：19540145  
 研究課題名 (和文) 計算構造の意味論 —双対性と非可換性の観点から—  
 研究課題名 (英文) Semantics for Computational Structures  
 —From Viewpoint of Duality and Noncommutativity—  
 研究代表者  
 浜野 正浩 (HAMANO MASAHIRO )  
 東京大学大学院情報理工学系研究科・客員研究員  
 研究者番号：50313705

## 研究成果の概要 (和文)：

主に、極性を持つ線形論理体系(polarized linear logic)が定める計算構造の意味論を解明した。計算の意味を射として捉えるための圏論的意味論を、2つの双対な極を持つ圏の間の随伴関手とモジュールによって構成し、これらの具体例を pre-\*-autonomous 圏などによって与えた。一方、計算可能性の意味論が、従来の代数的意味論に位相構造を入れることによって得られることを示し、これを“未解決問題”高階体系の極付き体系に関する保存性定理”を証明した。さらに、これら2種類の意味論(計算自身のものと計算可能性のもの)を関連付けるためにインデックス付きの体系(indexed polarized linear logic)を定式化し、ある極付の圏での表示的完全性とこの極付き体系での計算可能性に関する関連を与えた。

## 研究成果の概要 (英文)：

We investigate semantic structures of computations arising from polarized linear logic. A categorical model is constructed to model computations by employing modules and adjunction between two contravariant categories of dual polarities. To model computability for the second order logic, we accommodate a topological structure for the polarities to a (non-polarized) algebraic semantics. Using the topological semantics, we solve a second order conservation theorem of linear logic over its polarized fragment. To make a relationship between these two kind of semantics of computations and of computability, we present an indexed system for polarized logic and characterize a denotational completeness in terms of the system.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900000	270000	1170000
2008年度	800000	240000	1040000
2009年度	800000	240000	1040000
年度			
年度			
総計	2500000	750000	3250000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 ・ 数学一般

キーワード：

- ・ linear logic ・ denotational semantics ・ polarized category ・ full completeness
- ・ relational category ・ indexed linear logic ・ polarity ・ topological semantics

## 1. 研究開始当初の背景

'80年代中期にJ-Y.Girardにより創始された線形論理学は、従来の論理学を超えて、統語論と意味論とがより有機的に融合することを可能にした。このことは、報告者らによる充満完全性の概念の先行研究に見られ、主に表示的意味論の観点から'90年代中盤から盛んに研究が推進されていた。さらに2000年代に入り、これら計算の持つ静的な側面に着目する表示意味論のみならず、計算の実行過程そのものに内在する動的な側面を意味論的にある作用素によって定式化しようとする斬新な **geometry of interaction** 意味論がより自然で計算構造とは独立に生じる作要素代数を用いて構成できるというブレイクスルーが起こっていた。このような研究開始当時新展開をみせていた、線形論理に基づく計算意味論のこの2つの側面を背景に下記の目的(i)と(ii)が提案された。

## 2. 研究の目的

当研究は、計算構造の背後に潜む数学原理を双対性と非可換性に基づく意味論を用いて探究しようとする試みである。

このことを計算を本質的に表現する機能をもつ線形論理の高階体系の証明のカット規則の除去を通じて行う。

主に次の2つの意味論の構築を目指す。

- (i) 計算の意味をある数学構造における(計算実行過程による)不動点として捉える表示的意味論(denotational semantics)。
- (ii) 計算の実行プロセスをある数学空間の中の作用素としてとらえる **geometry of interaction** 意味論。

この研究により、従来までは Turing 機械構造を用いるなど論理計算言語自身に言及する統語論的手法や、その手法からの独立性が不明瞭なゲーム意味論の方法に依拠してしか分析のできなかった計算構造(計算のアルゴリズムやダイナミクス)をより数学的に普遍的な対象によって表現する。

## 3. 研究の方法

主に極付き線形論理 (**polarized linear logic**) 体系が定める計算の意味論の構築を以下の3つの枠組みからの方法を用いて行った。

## (1) 圏論の方法

計算自身をモデル化するために、圏論の枠組みで、モルフィズムや対角化自然変換(dinatural transformation)で計算を解釈する。さらに統語論的な極を特徴づけモデル化するために、双対な圏の間の随伴関手や、それに作用するモジュール、さらに

pre-**\***-autonomous 圏を用いる。具体例としては、Chu 空間, iterated double gluing construction, hyper グラフを用いる。さらに既存の non-polarized な体系の圏論モデルを、随伴に関する不動点からなる圏によって特徴づける。

## (2) 位相構造をもつ代数意味論の方法

高階の体系のためには(1)の方法での困難さが知られているため、まずはより特殊な計算可能性のみをモデル化するための代数モデルを用いる。これは、これは(1)の一般的手法の具体的適用例となる。具体的には Phase 意味論の中で極性を捉えるための構造を位相を用いて解釈する。

## (3) インデックス付き計算体系の方法

上記(1)計算の意味論と(2)計算可能性の意味論の関連を与えるために、通常の論理体系にインデックスを付与した indexed logic を定式化する。インデックスは表示的意味論での場所の概念を捉えるものである。この体系を用いて(1)での表示完全性定理と(2)の伝統的な完全性定理の関連を与える。

さらにインデックス計算体系をより自然な構造で実現するため、群の表現と指標の同値性を用いてモデル化する。

## 4. 研究成果

(1) 極性を持つ線形論理に対する圏論的意味論: (下記発表論文[1])

極性を持つ線形論理(polarized linear logic)に対する意味論を圏論的に構成し、これから通常の極をもたない線型論理の圏論意味論が導かれることを定式化した。Multiplicative Additive Polarized Linear Logic(MALLP)の圏論的な表示意味論を正と負な部分圏の間の随伴関手と代数的なモジュールにより構成した。

従来 MALLP の意味論は、 $\lambda \mu$  計算体系のモデルである Selinger の Control 圏('01)の線形化を用いる構成しか知られていなかったが、この方法では圏論の本質であるべき functoriality が弱い形でしか保証されない、不自然さがあったが、報告者の構成法はこれを克服する一般的な枠組である。またこの枠組みと Barr の pre-**\***-autonomous 圏との関連を与え、報告者の構成が従来の線形論理の意味論の一般化となっていることを示した。また、この構成の具体例が Hyland の double gluing 構成法の繰り返し(iteration)や、chu 空間などによって与えられることを示した。さらに随伴が引き起こす不動点からなる圏が通常の線形論理のモデルを与えることを

定式化し、MALLP の充満完全性定理を、報告者の先行研究 (R. Blute と P. Scott との共著) によって確立された(極を持たない通常の) MALL の手法 (Softness of Hypercoherences and MALL Full Completeness", *Annals of Pure and Applied Logic*. 131 (2005)) に還元しながら得た。

(2) 極性を持つ線形論理のための indexed 体系 : (下記発表論文 [2])

Bucciarelli-Ehrhard(2000)の indexed linear logic (MALL(I)) を、極性を持つ体系 MALLP(I) に拡張し、この indexed 体系の証明可能性に関する完全性定理と、通常の極付き線形論理の証明に関する完全性の関連を与えた。

報告者の拡張論理体系は、関係の圏 Rel 上の左右の随伴の組からなる pointed relation の圏を定式化し、これが MALLP の表示意味論を与えることを示す意味論的研究から生まれた。これは最も単純なコンパクト閉圏である Rel のスライス圏を与えることにより得られた。この意味論構成のため、Hamano-Scott の Polarized Category (上記研究成果(1)) の圏論枠組みを用いた。

MALLP(I)での極交換規則は、統語論的手法を用いて随伴性を定式化することにより得られ、この体系の論理規則は忠実に MALLP の表示意味論を記述することができた。

(3) 位相 phase 空間と二階の極付きモデル: (下記発表論文[3])

既存の(証明可能性のための)代数意味論として知られている phase 空間に位相構造を加えることにより、極性をもつ線形論理に対して完全性が成り立つ代数モデルが得られることを定式化した。さらにこのモデルを用い二階線形論理の極付き部分体系に対する保存拡大性問題を解決した。

この新しいモデルは、研究初年度に得られた Hamano-Scott の圏論構成法(上記研究成果 1)を、通常の線形論理の phase 空間モデルに適用することにより構成された。極をシフトするための互いに随伴な作用素が、この空間では開核作用素と閉包作用素になっていることを明らかにした。この極付き線形論理のための位相 phase 空間では、論理的な正と負が、openness と closedness によって自然に特徴付けられることになった。この位相をもつ phase 空間は二階の極付き線形論理 MALLP2 に対して完全である。

この位相意味論を用い、Laurent が 2002 年に与えた問題“二階の線形論理 LL2 の極付部分体系に対する保存拡大性問題”にたいして、否定的な解を与えた。これを受け、保存性と focalization 性の関連を与えながら、後者を

維持するような二階の部分体系  $LL_{\eta}2$  を提出し、これが極付き部分体系に対して保存拡大になっていることを示した。

(4) 今後の展望

① 準備中の成果 (下記学会発表[1])

群の表現論の出張点の Schur の補題が表示意味論の充満完全性の特別な形であることを指摘し、上記研究成果(2)で研究された表示意味論と極付き論理体系の関連が群の表現と指標によって与えられることを発表した。表現の指標理論が、計算可能性の意味論と、より強力な計算自身の意味論の橋渡しをすることを指摘した。さらにこの橋渡しは上記研究成果(3)で与えられた位相 phase 空間の積空間を用いることにより定式化されることを準備している。

② 今後の研究課題

極付き線形論理体系に対する GoI 意味論を研究成果(2)で得られた極性を持つ関係の圏に対する particle style の Int construction を用いて構成する。この構成法で得られるモデルは、上記研究成果(1)で得られた polarized category のコンパクトなバージョンを与える。この研究成果(1)の枠組みを用いた GoI 意味論は、計算のアルゴリズムを与える Execution formula の走る領域の細分化が可能なことより、新たな知見が得られることが期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

1. Masahiro Hamano and Phil Scott,

“A Categorical Semantics for Polarized MALL”, *Annals of Pure and Applied Logic*, Elsevier, 145 (2007). pp 276-313

2. Masahiro Hamano and Ryo Takemura,

“An Indexed System for Multiplicative Additive Polarized Lineaa Logic”, *Proc. of 17th EACSL AnnualConference on Computer Science Logic*, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, 5213, (2008). pp 262-277.

3. Masahiro Hamano and Ryo Takemura,  
“A Phase Semantics for Polarized Linear  
Logic and Second Order Conservativity” ,  
Journal of Symbolic Logic, 75(1),  
(2010). pp. 77-102.

[学会発表] (計 2 件)

1. Masahiro Hamano,  
“An Indexed System for Characters of Group  
Representations” ,  
24th annual conference on Mathematical  
Foundations of Programming Semantics,  
合衆国, ペンシルベニア大学, 2008年5月22  
日

2. Masahiro Hamano,  
“An Indexed System for Multiplicative  
Additive Polarized Linear Logic” , 17th  
EACSL Annual Conference on Computer  
Science Logic, Centro Residenziale  
Universitario di Bertinoro,  
ボローニャ大学, イタリア, 2008年9月17日

[その他]

ホームページ等

<http://www.jaist.ac.jp/~hamano>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

浜野 正浩 (HAMANO MASAHIRO)  
東京大学・大学院情報理工学系研究科・  
客員研究員  
研究者番号 : 50313705

### (2) 研究分担者

( )

### (3) 連携研究者

( )