様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22　年　5　月　31　日現在

研究種目：　基盤研究（Ｃ）
研究期間：　2007 年度　～　2009 年度
課題番号：　１９５４０１４７
研究課題名（和文）　移動境界問題に対する直接法の研究とその応用

研究課題名（英文）　A study of direct methods for moving boundary problems and its applications

研究代表者
牛島　健夫　(USHIJIMA TAKEO)
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号：　３０３３９１１３

研究成果の概要（和文）：幾つかの相の間の界面あるいは移動境界が，流体中の泡の運動・融解する氷・結晶成長といった多くの重要な物理現象にしばしば登場する．数値シミュレーションは，このような現象を研究するための不可欠な道具となっているが，我々は移動境界問題に対する直接法の一種であるクリスタライン・アルゴリズムという数値計算手法について研究を行った．この手法の一般化を行い，移動境界問題に対する強力な数値手法を得るとともに，それに関連する諸問題を解明した．さらにそれらの応用についても研究を行った．

研究成果の概要（英文）： Interfaces or moving boundaries among several phases often arise in many important physical phenomena like bubble motion in fluid, melting ice, crystal growth, and so on. To study such phenomena, numerical simulation is an indispensable tool. We investigated so-called crystalline algorithm, which is one of direct numerical methods for moving boundary problems. We generalized this method and as a result obtained a powerful numerical tool for moving boundary problem. We also solved several related problems. Moreover, we studied their applications.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	１，４００，０００	４２０，０００	１，８２０，０００
２００８年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
２００９年度	１，１００，０００	３３０，０００	１，４３０，０００
年度			
年度			
総　計	３，３００，０００	９９０，０００	４，２９０，０００

研究分野：　応用数学
科研費の分科・細目：　数学・数学一般（含む確率論・統計数学）
キーワード：　移動境界問題、直接法、数値解析、クリスタライン・アルゴリズム、クリスタライン曲率流

１．研究開始当初の背景

一般に時々刻々変化する二つの相の接

触面のことを移動境界あるいは界面と呼ぶが，このような移動境界を有する問題は，液体中の気泡の運動・河川の洪水氾濫・海洋の津波・溶けゆく氷・結晶成長など理工学分野において枚挙に暇がない．これらの問題の多くは偏微分方程式に対する自由境界問題として定式化されるが，それらに対する数学的解析のみでは，知りたい現象を十分に理解することが難しいのが現状であり，数値解析的手法の併用が不可欠である．移動境界を数値的に取り扱う方法としては，大きく分けて，直接法と間接法の２つがある．前者は，その名の通り，界面上に分点を配置するなどして，直接界面を離散化する方法であり，後者は界面をある関数の等高面などとして表し，その関数に対する方程式を離散化することで間接的に界面を取り扱う方法である．

移動境界問題に対する直接法は，計算結果から即座に界面に関する情報が得られる，間接法に比べて小さな次元の問題を扱えばいい，など優れた点が多々あるのだが，またいくつかの欠点も持っている．しばしば指摘される欠点の一つは，「分点の集中」による数値的不安定性の発生である．このような不安定性を取り除くための工夫は古くから研究されている．しばしば行われる工夫は，計算途中で人工的に分点を（一様に）再配置して，分点の集中を防ぐというものである．しかしながら，一般にこのような方法によって得られた数値解と元の問題の解との間の関係（収束性）は明らかでなく，再配置の根拠も薄弱である．

古典的曲率流のような２次元平面内の法線方向速度が曲率に依存した運動に関しては，この不具合に対する一般的な処方箋がすでに得られている．それは，「分点を接線方向にも動かす」というもので，これは，連続問題において閉曲線上の各点を法線方向に移動しても閉曲線の形状は不変であるという事実に基づいている．この方法によって数値スキームを構築した例として，M. Kimura（1997）や K. Mikula & D. Sevcovic(1999,2001,2004)などがある．これらの方法は優れた方法であり，点の再配置の根拠も明確だが，収束性などはまだ十分には明らかになっておらず，多次元空間内の問題への適用も困難である．

一方，我々は数年来，クリスタライン・アルゴリズムとよばれる一種の直接法について研究を行ってきた．このアルゴリズムは，曲率に依存した法線方向速度で運動する曲線を，多角形のクリスタライン運動で近似することによって得られる．クリスタライン運動とは，結晶成長を数学的に解析するために，J. Taylor(1991) や S. Angenent & M.E. Gurtin(1989)によって導入されたあるクラスの多角形の運動であり，その運動はある常微分方程式系によって記述される．クリスタライン運動についても多くの研究があるが，特にクリスタライン・アルゴリズムの収束性については，M.-H. Giga & Y. Giga(1999,2001), K. Ishii & H.M. Soner(1998)などをはじめとした研究によって，様々な問題に対するアルゴリズムの収束性が示されている．我々も，法線方向速度が曲率のベキ乗に比例するような曲率流や．面積保存の曲率流とよばれる問題に対するクリスタライン・アルゴリズムの収束性や，このアルゴリズムから作られる数値スキームの性質について研究を行っている(T.K. Ushijima &S. Yazaki(2000,2004))．クリスタライン・アルゴリズムによる計算結果には，人工的な分点の再配置を行っていないにも関わらず，先に述べたような数値的な不安定性が生じない．この良好な安定性は，クリスタライン・アルゴリズムも，陰的に「接線方向への移動」を利用していることによる結果であると言えるのだが，その理由はまだ十分には明らかになっていないと思われる．しかしながら，MS の方法とクリスタライン・アルゴリズムをよくよく比較検討して，その関係性を明らかにすることで，この安定性の理由の解明とより優れた直接法を構築できるものと期待されていた．

２．研究の目的

上述のような背景の下に，以下の諸点を研究することを，本研究課題の目的とした：

(1) Mikula & Sevcovic の方法とクリスタライン・アルゴリズムとの関係の解明とクリスタライン・アルゴリズムの良好な安定性の理由の解明. これらの方法の統合.
(2) クリスタライン・アルゴリズムの適用範囲の拡張．①クリスタライン・アルゴリズムの元になる，クリスタライン運動自身の拡張．②クリスタライン・アルゴリズムの３次元空間内の問題への拡張.
(3) 一般化されたクリスタライン運動の解析. クリスタライン運動の解の持つ性質の解明.
(4) 様々な移動境界問題の解析．①ヘレ・ショウセル中の気泡の運動の数値的再現と解析．②負結晶の解析とその応用．③ヘレ・ショーセル中のビスコスフィンガリングの解析.

３．研究の方法

研究分担者同士が常時連絡を取り合いながら研究を遂行するとともに，年に数回の頻度で直接会って数日間にわたる議論を行った．このために，本研究のための補助金が非常に有益であった．

研究課題の性質上，数学的な議論のみなら

ず，実際の数値計算の積み重ねが重要であるが，本補助金により購入した計算機によって様々な数値計算を行った．

上述のスロバキアの研究者 Mikula 氏や Sevcovic 氏，さらにチェコの Benes 氏らと，主として矢崎（研究分担者）を通じて研究交流，共同研究を行った．

また，上述の研究の目的の各項に対して，(1) は主として矢崎が，(2) は牛島・石渡（研究分担者）・矢崎が，(3) は主として石渡が，(4) は牛島・矢崎・石渡が分担して研究を行った．

４．研究成果

上述の研究の目的の各項に対応して，以下のような成果が得られた：

(1) 上述のようにクリスタライン・アルゴリズムは良好な安定性をもつ数値計算手法であるが，これは，クリスタライン運動を行う多角形が Admissible class と呼ばれるあるクラスに制限されており，そのクラスから出ないように運動を行うために，陰的に，接線方向にある速度で動くためであると解釈できることがわかった．このクリスタライン・アルゴリズム特有の接線方向速度と Mikula & Sevcovic による接線方向速度（これを用いると移動境界上の分点を漸近的に一様配置できる）とを上手く組み合わせることによって，良好な安定性を持つ数値計算手法を構築できることがわかった．この手法を用いて様々な移動境界問題の数値シミュレーションを行った．

(2) ①上述のように従来のクリスタライン運動は，その解となる曲線が Admissible class と呼ばれるあるクラスに制限されている．この制限を除く試みは様々に試みられてきたが，矢崎は，非 Admissible class の初期曲線に対するあるクリスタライン運動の解を考察し，その解は１点消滅するか，高々有限回の辺消滅の後に Admissible class の曲線となることを示した．さらに，従来のクリスタライン運動を特別な場合として含む，多角形の運動のあるクラスを導入することで，より広いクラスの問題に適用可能な数値計算手法を構築した．この方法は Ushijima & Yazaki (2004) で得られていたクリスタライン・アルゴリズムの一般化でもある．②多次元の問題に対するクリスタライン・アルゴリズムの拡張を行うことは，この分野における重要な未解決問題の一つである．３次元空間内のガウス曲率流がある種のクリスタライン運動によって近似可能であることは，我々の研究（Ushijima & Yagisita(2005)）によって知られていた．本研究では，この理論を元に数値計算アルゴリズムを構築し，様々な数値実験を行い，クリスタライン・アルゴリズムによってガウス曲率流が安定に計算できることが分かった．

(3) 古典的な曲率流の場合，その解である閉曲線は有限時間の内に凸になり，さらに有限時間の内に１点に消滅することが，Grayson(1987) の古典的な結果によって知られている．この結果のクリスタライン曲率流版が，石渡によって得られた．古典的な曲率流の場合とは異なり，クリスタライン曲率流の場合には，1 点消滅以外の特異性が生じることが，以前の我々の研究などを通じて知られていたが，石渡の結果はこれらのことをも考慮した，この問題に関するほぼ最終的な結果である．

(4) ①縦置きしたヘレ・ショウセル中を上昇する気泡は極めて興味深い挙動を見せる．この問題は気相と液相の間の移動境界問題であり，本研究課題と密接な関係がある．この現象を理解するために，現象のモデル化，その数値計算を行った．未だ十分な結果を得られていないため，この問題は今後の研究課題である．②氷結晶内のチンダル像が再凍結する際に生じる負結晶（negative crystal）と呼ばれる泡のモデリングとシミュレーションを，面積保存のクリスタライン曲率流を用いて行った．③ヘレ・ショウセル中に液体を封入し，セルの間隔を広げていくことで起こる気液境界の形状に現れるフィンガリング現象に対して，(1)で開発された一般化された接線方向速度を利用した方法と境界要素法を併用した数値計算アルゴリズムを構築し，それを用いた数値シミュレーションを行った．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 12 件）

(1) M.Beness, M.Kimura, S.Yazaki, Second order numerical scheme for motion of polygonal curves with constant area speed, Interfaces and Free Boundaries, 査読有, 11 (2009), 515-536.

(2) 石渡　哲哉，あるクリスタライン運動の多角形解の挙動について，京都大学数理解析研究所講究録，査読無，1633(2009)，1-10.

(3) 石渡　哲哉，Motion of non-convex polygons by crystalline curvature and almost convexity phenomena, Japan

Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, 25(2008), 233-253.

(4) 石渡　哲哉，矢崎　成俊，Interface motion of a negative crystal and its analysis, 数理解析研究所講究録，査読無，1588(2008)，23-29.

(5) M. Beneš, M. Kimura, P. Pauš, D. Ševčovič, T. Tsujikawa, S. Yazaki, Application of a curvature adjusted method in image segmentation, Bull. Inst. Math. Acad. Sin.，査読有，3(2008)，509-523.

(6) S. Yazaki, On the tangential velocity arising in a crystalline approximation of evolving plane curves, Kybernetika, 査読有，43 (2007)，913-918.

(7) S. Yazaki, Asymptotic behavior of solutions to an area-preserving motion by crystalline curvature, Kybernetika, 査読有，43(2007)，903-912.

(8) S. Yazaki, Motion of nonadmissible convex polygons by crystalline curvature, Publ. Res. Inst. Math. Sci.，査読有，43(2007)，155-170.

(9) C. Hirota, T. Ishiwata, S. Yazaki, Numerical Study and examples on singularities of solutions to anisotropic crystalline curvature flows of nonconvex polygonal curves, Asymptotic analysis and singularities - elliptic and parabolic PDEs and related problems, Adv. Stud. Pure Math. 査読有，47-2(2007)，543-563.

〔学会発表〕（計 37 件）

(1) 矢崎　成俊，曲率流方程式の数値計算について，日本数学会 2009 年度秋季総合分科会（応用数学分科会），2009 年 9 月 27 日，大阪大学豊中キャンパス.

(2) 石渡　哲哉，On the motion of polygonal curves by crystalline flow with bulk effect, 1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE’s, 2009 年 6 月 16 日，東北大学.

(3) 矢崎　成俊，Evolution of plane curves and its numerical computations, Algorithmy 2009, 2009 年 3 月 17 日，Podbanske.

(4) 石渡　哲哉，On the motion of polygons by crystalline curvature, Third Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2008 年 9 月，仙台.

(5) 矢崎　成俊，D. Seccovic, A redistribution method of points taking into account the shape of curve by using crystalline tangential velocity in curvature flow equations, Equadiff 07, Minisymposia: PDE models of interface evolution and applications, 2007 年 8 月 10 日，Vienna University of Technology.

(6) 石渡　哲哉，Motion of polygonal curves by crystalline curvature flow and its generalization, The 6th ICIAM (International Congress on Industrial and Applied mathematics)，2007 年 7 月 18 日，Zurich.

〔図書〕（計 2 件）

(1) 牛島　健夫，矢崎　成俊，泡の動きを視る，「数理科学」，535, 18-22，サイエンス社(2008).

(2) 矢崎　成俊，クリスタライン曲率流方程式の漸近挙動について，「これからの非線形微分方程式」第１２章，日本評論社 (2007).

６．研究組織

(1) 研究代表者

牛島　健夫（USHIJIMA TAKEO）
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号：３０３３９１１３

(2) 研究分担者

石渡　哲哉（ISHIWATA TETSUYA）
芝浦工業大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：５０３３４９１７

矢崎　成俊（YAZAKI SHIGETOSHI）
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：００３２３８７４
（Ｈ１９：研究協力者）

山崎　多恵子（YAMAZAKI TAEKO）
東京理科大学・理工学部・教授）
研究者番号：６０２２０３１５
（Ｈ２０->Ｈ２１：連携研究者）

小川　聖雄（OGAWA MASAO）
研究者番号：５０４０８７０４
（Ｈ２０->Ｈ２１：連携研究者）

渡邊　道之（WATANABE MICHIYUKI）
新潟大学・教育学部・准教授
研究者番号：９０３７４１８１
（Ｈ２０->Ｈ２１：連携研究者）

(3)連携研究者