

平成 22 年 11 月 8 日現在

機関番号：3 2 6 7 5

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2009

課題番号：1 9 5 4 0 1 5 0

研究課題名(和文) ランダムグラフを用いたモデル理論の研究

研究課題名(英文) A Study of the Model Theory of Random Graphs

研究代表者

池田 宏一郎 (IKEDA KOICHIRO)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：6 0 3 3 2 0 2 9

研究成果の概要(和文):本研究の目的は、ランダムグラフの一般化としてのジェネリック構造の研究、さらにはジェネリック構造を用いた Lachlan 予想(可算モデルの個数に関する予想)の解決にあった。ジェネリック構造の研究に関しては、Baldwin の問題(すべてのジェネリック構造は真に安定か $\omega$ 安定か)を否定的に解決することができた。Lachlan 予想に関しては、ジェネリック構造を用いて Lachlan 予想の反例を構成することは難しいことを証明した。

研究成果の概要(英文):Our aim is to study generic structures as a generalization of random graphs, and moreover to construct a counter-example of Lachlan conjecture using the generic construction. One of our results is a theorem which gave a solution of Baldwin's problem. Another is a theorem which proved that it was difficult to construct a counter-example of Lachlan conjecture using the generic construction.

交付決定額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野:数物系科学

科研費の分科・細目:数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード:数学基礎論,モデル理論

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 1989年に Hrushovski はモデル理論における2つの有名な予想を否定的に解決した。その際、反例を構成するために用いられた共通する手法は、現在では Generic 構成法と呼ばれ、Hrushovski や Baldwin をはじめとするモデル理論の代表的な研究者によって活発

に研究されており、2002年にはこれまでの研究をまとめた本[2]も出版された。なお、Zilber の問題を解決した応募者の結果[3]もこの本の中で紹介されている。国内においても応募者の他の結果([4],[5])および桔梗宏孝氏、坪井明人氏との共著論文[6]を含め、いくつかの結果が得られている。

一方、ランダムグラフは、1959年にエルデ

シュによって、特殊な性質をもつ有限グラフの存在を示すために初めて導入された。そして現在では、その方法は確率論的手法と呼ばれ、グラフ理論のひとつの分野になっている。また最近では、工学的なネットワーク研究との関連で話題になることも多く、国内外を問わず多くの研究がなされている。

しかし、申請時には、Generic 構成法を用いたランダムグラフの研究は、Zero-One Law に関する Baldwin-Shelah の結果[1]を除いてはほとんど存在しなかった。

一方、Lachlan 予想はモデルの個数に関する非常に有名な予想であり、Hrushovski をはじめとして多くのモデル理論研究者が挑戦してきたが、未解決のままである。Generic 構成法はこの予想を否定的に解決するのに有効な手段と考えられていたが、現在まで大きな進展はないのが現状である。

(2) 応募者は Generic 構成法の研究を通じて、この構成法をランダムグラフに応用した Baldwin-Shelah の結果[1]の存在を知った。Zero-One Law に関する彼らの結果は、一見無関係にみえるランダムグラフと Generic 構成法を結びつけた面白いものであるが、それに類する結果はほとんどなかった。そこで、ランダムグラフの他の結果の中には、Generic 構成法がうまく適用できるものがあると考えた。

また、ランダムグラフにおける確率論的手法の研究を推し進めることで、あたらしい Generic 構成法の開発に結びつくのではないかと予想した。そして、その結果が Lachlan 予想解決のきっかけになると考えた。

#### 参考文献

- [1] John T. Baldwin and Saharon Shelah, Randomness and semigenericity. Transaction of American Mathematical Society 349, no. 4 (1997), 1359--1376
- [2] Katrin Tent(ed.), Tits buildings and the model theory of groups, London Mathematical Society. Lecture Note Series 291, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [3] Koichiro Ikeda, Minimal but not strongly minimal structures with arbitrary finite dimension, Journal of Symbolic Logic 66, no. 1(2001), 117--126
- [4] Koichiro Ikeda, A note on generic projective planes, Notre Dame Journal of Formal Logic 43, no. 4(2002), 249--254
- [5] Koichiro Ikeda, A remark on the stability of saturated generic graphs. Journal of the Mathematical Society of Japan 57, no. 4(2005), 1229--1234
- [6] Koichiro Ikeda, Hirotaka Kikyo and

Akito Tsuboi, On generic structures with a strong amalgamation property, Journal of Symbolic Logic 74, 721-733 (2009)

## 2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、ランダムグラフを用いて、数学基礎論の一分野であるモデル理論の研究を行うことにあった。より具体的には

- ・目的1: Generic 構成法のランダムグラフへの応用,
  - ・目的2: Lachlan 予想の新しい Generic 構成法によるアプローチ,
- を目的とした。

ランダムグラフの理論は、確率論的手法を用いたグラフ理論の一分野である。一方、Generic 構成法は、有限構造を貼り合わせて無限構造を作る方法で、モデル理論における手法のひとつである。

本研究を申請した時点において、Generic 構成法とランダムグラフを関連付けた研究はほとんどない状態であったが、それらを結びつける研究が目的1である。

そして、目的1で得られた結果を、モデル理論の有名な予想である Lachlan 予想にフィードバックし、予想解決への糸口をつかむことが目的2である。

(2) Shelah-Spencer[3]は、特定の辺確率をもつランダムグラフにおいて、どんな1階の性質の極限確率も0か1になることを示した。この性質は Zero-One Law と呼ばれている。Baldwin-Shelah[1]はこの結果に対してモデル論的別証明を与えた。一方、辺確率によっては、Zero-One Law が成り立つ場合や成り立たない場合があり、Shelah-Spencer[3], Lynch[2]らの結果があるが、それらはすべて組合せ論的証明である。そこで次を目標とした。

- ・目標1A: Zero-One Law に関する結果に対して Generic 構成法を適用する。

また、辺確率によっては、Zero-One Law は成り立たないが、任意の1階の性質の極限確率が必ず収束する場合がある。この性質は Convergence Law と呼ばれ、Lynch[2]の結果がある。これらに対しても

- ・目標1B: Convergence Law に関する結果に対して Generic 構成法を適用することを目標にした。

Generic 構成法は Lachlan 予想解決の有効な手段と考えられていたが、現在も未解決であり、Generic 構成法に新たな手法を導入する必要があると考えた。そのためにランダムグラフの確率論的手法は有効であると予想し、次は達成可能な目標であると考えた。

- ・目標2: ランダムグラフの手法を用いた新

しい Generic 構成法の開発。

そしてこの具体的目標の達成が、Lachlan 予想解決のきっかけになるのではないかと考えた。

#### 参考文献

[1] J. T. Baldwin, S. Shelah, Randomness and semigeranicity. Transaction of American Mathematical Society 349, no. 4 (1997), 1359--1376

[2] James F. Lynch, Probabilities of sentences about very sparse random graphs. Random Structures Algorithms 3, no. 1 (1992), 33--53

[3] S. Shelah, J. Spencer, Zero-one laws for sparse random graphs. Journal of American Mathematical Society 1, no. 1 (1988), 97--115

### 3. 研究の方法

(1) 本研究では次の二つを目的とした。

- ・目的 1 : Generic 構成法のランダムグラフへの応用
- ・目的 2 : Lachlan 予想の Generic 構成法によるアプローチ

以下、この目的を達成するための具体的な研究方法を述べる。

(2) 平成 19 年度の研究方法は以下の通り。

本研究を実行するためには、Generic 構成法がランダムグラフにどれだけ有効かを見極める必要がある。よって平成 19 年度は目的 1 に比重を置いて研究を進めていく。具体的には次の二つを目標とした。

- ・目標 1A : Zero-One Law に関する結果に対して Generic 構成法を適用する。
- ・目標 1B : Convergence Law に関する結果に対して Generic 構成法を適用する。

目標 1A に関しては、Generic 構成法を Zero-One Law に応用した Baldwin-Shelah の結果 [1] が既にあるので、その結果を参考にしつつ、Baldwin 氏 (イリノイ大学) と連絡を取りながら研究を進めていく。また、応募者の申請時の準備状況 ([3], [4]) から、目標 1A を達成することは十分可能である。目標 1A の進行状況によっては、目標 1B の研究にも取り掛かる。

以上の研究計画を達成するためには、まず、研究に関連する資料を集めなければならない。モデル理論関連図書はもちろんであるが、ランダムグラフ関連の専門書や資料が必要となってくる。計算機を整備する必要がある。ランダムグラフと Generic 構成法のいずれの研究も、特定の性質をみたす有限グラフの存在を調べることが必要となる。そこ

で、有限グラフの解析に必要なパソコン・ソフトウェア等を購入する。また、国内外の研究者と研究に関する情報交換をするために、セキュリティを含めて十分な通信環境が必要となる。以上の点から計算機周辺の環境を整えていく。海外研究者との研究交流も必要となる。まず、Generic 構成法の専門家でありランダムグラフにも詳しい Baldwin 氏 (イリノイ大学) とは研究協力者として様々な形で連絡を取り合う。また、目標 1A に関する結果が得られ次第、モデル理論 (あるいはランダムグラフ) の海外研究集会でその成果を発表する。その際、様々な分野の海外研究者と研究交流を図る。国内研究者の研究交流も必要となる。特に研究分担者である坪井明人氏 (筑波大学) と桔梗宏孝氏 (神戸大学) とは、メール等の研究連絡はもちろんのこと、年に数回、Generic 構成法に関する研究打合せをする場を設ける。また、彼らを含めたモデル理論研究者を集めて、夏と冬に研究集会を開催し、応募者の研究成果についての意見を求める。さらに、グラフ理論の研究集会にも積極的に参加し、国内におけるランダムグラフ研究の状況などの情報交換を行う。

(3) 平成 20 年度以降の研究方法は以下の通り。

平成 20 年度以降は目的 2 の達成を目標とする。具体的には次の目標を設定した。

- ・目標 2 : ランダムグラフの手法を用いた新しい Generic 構成法の開発

平成 19 年度の研究計画が達成されれば、Generic 構成法によるランダムグラフ研究が十分整理される。その際に得られる様々なタイプの Generic 構成法を十分吟味し、平成 20 年度以降は新しい Generic 構成法の開発に焦点を当てて研究を進める。しかし、平成 19 年度の研究結果が新しい Generic 構成法の開発にうまく結びつかない場合は、平成 18 年度以前の研究に多少比重を移して研究を進める。いずれにせよ、Lachlan 予想に対して Generic 構成法がどの程度適応できるのか、その可能性と限界についての研究を推し進める。また、Lachlan 予想に関する応募者の準備状況についても、過去に Pillay 氏および坪井氏との共著論文で得られた結果 [2] などが、研究を進めるのに可能な状況であると考える。

以上の研究計画を達成するためには、まず、研究関連図書の補充が必要となる。平成 19 年度まででモデル理論関連図書はほぼ充実しているが、ランダムグラフ研究は開始して間もないので、関連図書が必要になり次第、随時購入する。計算機周辺設備も充実させなければならない。現在使用しているプリンタも平成 21 年度には古くなるので購入する。さらに有限構造を解析するソフトで新たなもの

も必要になる。また通信環境をより安全なものにするためには、毎年、そのためのソフトウェア・周辺機器を充実させることが必要である。国内研究者の研究協力も必要となってくる。特に、連携研究者の坪井氏および桔梗氏は、Generic 構成法と Lachlan 予想に関連した共同研究をまとめる作業を行う。また、平成 19 年度同様、年に二回ほどモデル理論関係の研究集会を行うほか、ランダムグラフ関連の研究者との合同研究集会を開催する。そこで、モデル理論研究者に限らず多くの研究者に本研究成果に対する意見を求める。海外研究者の研究協力も必要となる。平成 19 年度同様、研究協力者の Baldwin 氏と様々なかたちで研究連絡を行うなどして共同研究を行う。また、Generic 構成法と Lachlan 予想に関して詳しいモデル理論研究者として、Pillay 氏（リーズ大学）とも研究協力者として直接議論できる場を作る。そして、研究結果が得られ次第、海外の研究集会で発表し、その成果について多くの海外研究者に意見を求める。

#### 参考文献

- [1] John T. Baldwin and Saharon Shelah, Randomness and semigenericity. Transaction of American Mathematical Society 349, no. 4 (1997), 1359--1376
- [2] Koichiro Ikeda, Anand Pillay and Akito Tsuboi, On theories having three countable models. Mathematical Logic Quarterly 44, no. 2 (1998), 161--166
- [3] 池田宏一郎, モデル理論のランダムグラフへの応用, 京都大学数理解析研究所講究録 1525 (2006), 5-14
- [4] Koichiro Ikeda, Hirotaka Kikyo and Akito Tsuboi, On generic structures with a strong amalgamation property, Journal of Symbolic Logic, 74 巻 3 号 (2009), 721 - 733

#### 4. 研究成果

(1) 本研究によって得られた主な成果は

- ・Baldwin の問題の解決
- ・Lachlan 予想の部分的解決
- ・クリプケ構造とランダムグラフの関連付けの三つである。以下では、年度ごとにこれらの結果が得られた過程を述べる。ただし、論文・発表は「5. 発表論文等」から引用している。

(2) 平成 19 年度の目標は、モデル理論がランダムグラフの諸性質を解析する際に、どの程度、有効であるかを確認することであった。そこでランダムグラフに関連が深い、モデル理論の一分野である generic 構造に関する研

究発表を、2007 年 7 月に海外研究集会（学会発表⑨）で行い、Generic 構造とランダムグラフの関連性について海外のモデル理論研究者と意見交換を行った。

そしてこれらの意見を踏まえ、8 月に筑波大学で開催された研究集会（学会発表⑩）において Generic モデルに関する研究発表を行い、筑波大学の坪井明人氏、神戸大学の桔梗宏孝氏などの国内のモデル理論研究者に、この研究の方向性について意見を求めた。

その後、以上の研究成果をまとめ、東北大学で開催された日本数学会（学会発表⑪）でその成果を発表し、さらに RIMS 共同研究（学会発表⑫）においても講演を行った（講演内容は雑誌論文⑬にまとめられた。）

また、この研究集会において、同時に、クリプケ構造とランダムグラフとの関係に関する研究発表も 2 件行った（学会発表⑭, ⑮）。この研究は産業総合研究所の岡本圭史氏との共同研究である。また、この結果は雑誌論文⑯, ⑰にまとめられた。

(3) 平成 20 年度の研究成果は以下の通り。

ジェネリック構造における独立性などの概念を解析し、その結果を数理解析研究所講究録にまとめた。また、筑波大の坪井氏、神戸大の桔梗氏と強い融合性をもつジェネリック構造の研究をまとめ、その結果は雑誌論文⑱にまとめられた。

一方、非常に強い条件の下ではジェネリック構造において Lachlan 予想は正しいことがわかり、その結果を 2008 年 8 月に開催された研究集会で発表した（学会発表⑲）。その際、筑波大の坪井氏、神戸大の桔梗氏を含む国内のモデル理論研究者とこの結果について研究打ち合わせをおこなった。その後、仮定していた強い条件をわかりやすい形に整理し、その結果は 2008 年 9 月に開催された国際研究集会で発表された（学会発表⑳）。その際、この集会の参加者であった延世大学の Byunghan Kim 氏から有益なコメントを得た。そしてこの結果をさらに改良し、二つの条件、「部分グラフに関して閉」と「自由融合性」の仮定の下、ジェネリック構造において Lachlan 予想は正しい、という結果を得た。この結果は 2008 年 11 月に開催された RIMS 研究集会で発表され（学会発表㉑）、それをまとめたものは雑誌論文㉒である。この結果は、ジェネリック構造における可算モデルの個数に関する結果が存在しない現時点では、ある一定の意義があると思われる。また、2009 年 2 月に開催されたモデル論研究集会では先の結果とは違う仮定のもとでジェネリック構造において Lachlan 予想が成り立つことがわかった（学会発表㉓）。

(4) 平成 21 年度の研究成果は以下の通り。

本研究の目的は、グラフ理論の概念であるランダムグラフと、モデル理論の概念であるジェネリック構造の関係をあきらかにすることにある。その際に研究代表者が目標としていた問題のひとつに「超安定であるが $\omega$ 安定なジェネリック構造が存在しない」ことを主張する Baldwin 予想があった。この予想を本研究期間において解決することができた。

まず、筑波大学の安保氏との共同研究により、Baldwin 予想の部分的結果を得ることができたので、その結果に関連する内容を 2009 年 7 月に開催された研究集会において発表した（学会発表⑧）。安保氏との共同研究の論文は雑誌論文①にまとめられた。その際に、集会に参加していた Baldwin 氏との議論から新たな着想を得ることができた。そこでその結果をまとめ、2009 年 8 月に開催された研究集会および 9 月に開催された日本数学会においてそれぞれ発表した（学会発表⑦、⑥）。さらに、2009 年 11 月に開催された研究集会（学会発表⑤）において、連携研究者である筑波大学の坪井氏、神戸大学の桔梗氏と研究打ち合わせを行い研究は大きく進展し、Baldwin 予想の反例があることがわかった。そしてその結果を 2010 年 3 月に開催された国際研究集会において発表した（学会発表④）。

(5) Baldwin の問題の解決は本研究期間内に得られたが、その正しさと意義を確認するために平成 22 年度もいくつかの研究集会に参加し、この結果に関する研究発表を行った（学会発表①、②、③）。結果をまとめた論文 (Ab initio generic structures which are superstable but not  $\omega$ -stable) は現在投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

- ① Y. Anbo, K. Ikeda, A note on stability spectrum of generic structures, *Mathematical Logic Quarterly* 56, 257-261 (2010), 査読有.
- ② K. Ikeda, A remark on generic structures and the number of countable models, *Proceedings of the 10th Asian logic conference*, World Scientific, 214-226 (2010), 査読有.
- ③ 池田宏一郎, ジェネリック構造の飽和性と安定性, 京都大学数理解析研究所講究録に掲載決定, 全 11 ページ (2011), 査読無.
- ④ K. Ikeda, On superstable generic structures, 京都大学数理解析研究所講究

- 録に掲載決定, 全 10 ページ (2011), 査読無.
- ⑤ K. Ikeda, H. Kikyo, A. Tsuboi, On generic structures with a strong amalgamation property, *Journal of Symbolic Logic* 74, 721-733 (2009), 査読有.
  - ⑥ K. Ikeda, A note on independence in generic structures, 京都大学数理解析研究所講究録 1602, 22-25 (2008), 査読無.
  - ⑦ 池田宏一郎, 岡本圭史, On generic Kripke structures, 京都大学数理解析研究所講究録 1602, 85-89 (2008), 査読無.
  - ⑧ 池田宏一郎, 岡本圭史, On random Kripke frames, 京都大学数理解析研究所講究録 1602, 74-84 (2008), 査読無.
  - ⑨ K. Ikeda, A note on stability spectrum of generic structures, 都大学数理解析研究所講究録 1555, 104-109 (2007), 査読無.

〔学会発表〕（計 19 件）

- ① 池田宏一郎, 超安定な generic 構造, 日本数学会秋季総合分科会, 名古屋大学東山キャンパス, 2010 年 9 月 22 日
- ② 池田宏一郎, 超均質性について, モデル理論夏の学校 2010, 聖徳大学, 2010 年 8 月 27 日
- ③ K. Ikeda, A remark on ab initio generic structures, 2010 Model Theory Conference in Seoul, Yonsei University, 2010 年 5 月 20 日, 招待講演.
- ④ K. Ikeda, Stability spectrum of ab initio generic structures, Model Theory Kirishima 2010, 旅行人山荘, 2010 年 3 月 5 日, 招待講演
- ⑤ 池田宏一郎, 安定性理論とジェネリック構成法, 「モデル理論とその周辺」研究集会, 神戸大学, 2009 年 11 月 28 日
- ⑥ 池田宏一郎, Baldwin の予想について, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学豊中キャンパス, 2009 年 9 月 27 日
- ⑦ 池田宏一郎, A note on Herwig's example, 2009 年度モデル理論サマースクール, 和歌山市民会館, 2009 年 8 月 28 日
- ⑧ K. Ikeda, On Baldwin's problem, Model Theory Afternoon with John Baldwin, 東海大学代々木校舎, 2009 年 7 月 1 日
- ⑨ 池田宏一郎, 可算言語におけるジェネリック構造, 鹿児島モデル理論研究集会, 鹿児島国際大学, 2009 年 2 月 23 日
- ⑩ 池田宏一郎, On generic structures closed under subgraphs and free amalgamation, RIMS 研究集会「モデル理論とその代数への応用」, 京都大学数理解析研究所, 2008 年 11 月 11 日
- ⑪ K. Ikeda, On saturated generic structures, The 10th Asian Logic Conference, Kobe University, 2008 年 9 月 6 日, 招待講演
- ⑫ K. Ikeda, A note on saturated generic

structures, Model Theory Summer Meeting 2008, 東海大学代々木キャンパス, 2008年8月8日

⑬池田宏一郎, 桔梗宏孝, 自己同型写像の融合可能性について, 日本数学会年会, 近畿大学, 2008年3月26日

⑭ K. Ikeda, Some remarks on generic structures, RIMS 共同研究「モデル理論の手法による無限構造の構成法」, 京都大学数理解析研究所, 2007年10月30日

⑮池田宏一郎, 岡本圭史, On random Kripke frames, RIMS 共同研究「モデル理論の手法による無限構造の構成法」, 京都大学数理解析研究所, 2007年11月1日

⑯池田宏一郎, 岡本圭史, On generic Kripke structures, RIMS 共同研究「モデル理論の手法による無限構造の構成法」, 京都大学数理解析研究所, 2007年11月1日

⑰池田宏一郎, Generic 構造における forking の特徴づけ, 日本数学会 (東北大学), 2007年9月23日

⑱池田宏一郎, Characterizing forking on generic structures, Model Theory Summer Meeting in Tsukuba 2007, 筑波大学, 2007年8月7日

⑲K. Ikeda, A remark on a characterization of non-forking in generic structures, Logic Colloquium 2007 (Wroclaw University, Poland), 2007年7月18日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

池田 宏一郎 (IKEDA KOICHIRO)  
法政大学・経営学部・教授  
研究者番号: 60332029

### (2) 研究分担者

坪井 明人 (TSUBOI AKITO)  
筑波大学・数理物質科学研究科・教授  
研究者番号: 30180045

(H20 → H21 : 連携研究者)

桔梗 宏孝 (KIKYO HIROTAKA)  
神戸大学・工学研究科・教授  
研究者番号: 80204824  
(H20 → H21 : 連携研究者)