

平成 22 年 4 月 6 日現在

研究種目：基盤研究 (C)  
 研究期間：2007 ~ 2009  
 課題番号：19540151  
 研究課題名 (和文) 関数空間の局所的性質から導かれる実数の特異部分集合とその臨界濃度の研究  
 研究課題名 (英文) A study on special subsets of real numbers derived from local properties of function spaces and their critical cardinalities  
 研究代表者  
 酒井 政美 (SAKAI MASAMI)  
 神奈川大学・工学部・教授  
 研究者番号：60215598

研究成果の概要 (和文)：位相空間  $X$  上の各点収束位相を入れた関数空間  $C_p(X)$  の局所的性質が  $X$  の被覆に関する性質で特徴づけられることが知られている。例えば、Gerlits と Nagy は「 $C_p(X)$  が Frechet property を満たすための必要十分条件は  $X$  が  $\gamma$ -集合である」ということを示した。 $\gamma$ -集合は実数の部分集合では強測度零となる集合であり、 $C_p(X)$  の局所的性質を特徴づけるのは記述集合論に現れるような実数の特異部分集合が深く関係していることが分かる。このような集合論的位相幾何の興味のもと、 $C_p(X)$  のいろいろな局所的な性質について、それらの特徴づける実数の特異部分集合を研究し、Scheepers、Bukovsky 等が提出した  $C_p(X)$  の局所的性質に関するいくつかの未解決問題を肯定的、または否定的に解決した。

研究成果の概要 (英文)：For a topological space  $X$ , we denote by  $C_p(X)$  the space of all continuous functions with the topology of pointwise convergence. It is known that a local property of  $C_p(X)$  can be characterized in terms of a covering property of  $X$ . For example, Gerlits and Nagy showed that  $C_p(X)$  is Frechet if and only if  $X$  is a  $\gamma$ -set. A  $\gamma$ -set is strong measure zero, so some local properties of  $C_p(X)$  are related with some singular sets of reals appeared in descriptive set-theory. We studied some relations between local properties of  $C_p(X)$  and singular sets  $X$  of reals, and answered some open problems posed by Scheepers, Bukovsky and so on.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	400,000	120,000	520,000
2008年度	400,000	120,000	520,000
2009年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総計	1,200,000	360,000	1,560,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：数学基礎論

1. 研究開始当初の背景

Gerlits と Nagy が 1982 年に、「 $C_p(X)$  がFrechet property を満たすための必要十分条件は  $X$  が  $\gamma$ -集合である」ということを証明

し、 $C_p(X)$  の局所的性質と  $X$  の被覆的性質 (特に記述集合論に現れるような性質) の間に興味深い関係があることを示して以来、この関係について、集合論、トポロジー、Ramsey 理論、無限組合わせ理論、無限ゲーム理論などの各立場からいろいろと研究がなされていた。研究開始当初、筆者は次のような結果を得ており、これらの結果が本研究開始の背景となった。

Theorem (a)  $C_p(X)$  が Pytkeev property をもつための必要十分条件は、 $X$  が性質  $(\pi)$  を満たすことである。[2004年]

(b)  $C_p(X)$  が  $k$ -Frechet property をもつための必要十分条件は、 $X$  が性質  $(\kappa)$  を満たすことである。[2006年]  
ここに出てくる性質  $(\pi)$  や  $(\kappa)$  は、いずれも実数の特異部分集合と密接な関係がある。

## 2. 研究の目的

前述の背景を踏まえ、 $C_p(X)$  の局所的性質と  $X$  の位相的性質の関係を明らかにするため、主に次の事柄を研究目的とした。以下の目的はお互い密接に関係している。

(1) (Malykhinの問題) 位相空間  $X$  が性質  $(\pi)$  を満たす実数の部分集合であれば、 $X$  は  $\gamma$ -集合であることを示す。

(2)  $X$  が性質  $(\pi)$  を満たす実数の部分集合であれば、 $X$  は Rothberger property を満たすことを示す。

(3) (Tsaban の問題) 位相空間  $X$  が Gerlits と Nagy による性質  $(\delta)$  を満たす実数の部分集合であれば、 $X$  は  $\gamma$ -集合となることを示す。

(4) 臨界濃度に関して、等式 
$$b = \min\{ |X| : X \text{ は実数の集合で、} C_p(X) \text{ は } k\text{-Frechet property をもたない} \}$$
 を示す。

## 3. 研究の方法

本研究は  $C_p(X)$  の局所的性質の研究と空間  $X$  の記述集合論的な性質の研究が必要であり、集合論の方向からとトポロジーの方向からの研究が必要となる。

(1) 集合論 (特に、記述集合論) とトポロジーの研究に詳しい嘉田氏 (大阪府立大) との継続的な意見交換を行い、専門知識の提供も受ける。

(2) 研究分担者の矢島氏は被覆的性質に関する知識、アイデアをもっており、実数の特異部分集合の被覆的性質に関する特性を解析する研究を分担する。

これらの集合論およびトポロジーの方向からの研究に、今までの筆者の研究成果を総合して研究目的の達成を図る。

## 4. 研究成果

主な研究成果は以下の通りです。

(1) Shakhmatov, Nogura は局所的性質 the Ramsey property を導入し、この性質が Arkhangel'skii の導入した局所的性質  $\alpha_2$  (または、 $\alpha_1$ ) と  $C_p(X)$  において一致するかという問題を提出した。この問題に対して、 $C_p(X)$  においては the Ramsey property  $= \alpha_2$  であることを示し、また the Ramsey property と  $\alpha_1$  は同値でない例があることを示した。連続関数列の (各点収束よりも強い) 擬正規収束に関する Scheepers 予想を解決する上で有用ないくつかの結果も得た。[雑誌論文①]

(2) Scheepers 予想の解決に向けて Bukovsky が導入した上半連続関数列の収束に関する性質  $wQN^*$ -空間と  $SSP^*$ -空間について、これらが同値であることを示し、 $wQN^*$ -空間は  $SSP^*$ -空間になるかという Bukovsky の問題を肯定的に解決した。またこれに関連して、いくつかの被覆的性質について、上半連続関数列を利用して特徴づけた。[雑誌論文③]

(3) Scheepers 予想を解決するために、上半連続関数列の収束を利用するという Bukovsky の研究方向に触発され、Scheepers 予想が成立するための条件として性質 (USC) を導入して、どのような空間がこの性質を満たすかをいろいろな場合について研究した。ここで、性質 (USC) は上半連続関数列が各点で 0 に収束するとき、上半連続関数列を上から押さえて各点で 0 に収束する連続関数列が存在することである。特に、実数の部分集合が記述集合論で現れる  $\sigma$ -集合であれば (USC) を満たすことを示し、 $\sigma$ -集合であれば Scheepers 予想が成立することを得た。また、性質 (USC) の点有限性 (point-finite property) を用いた特徴づけも与えて証明に利用した。[雑誌論文④]

(4) 関数空間  $C_p(X)$  の局所的性質を調べる上で非常に重要な被覆的性質である Menger property と Hurewicz property について、the Sorgenfrey line のどのような部分集合が Menger property や Hurewicz property をもつかについて必要条件と十分条件を与えた。必要条件と十分条件はともに記述集合

論的な性質で与えられる。また実順序空間において、Lindelof property の条件もとで Menger property と total paracompactness は同値であることを示した。〔雑誌論文⑤〕

(5) 筆者が2003年に提出した「 $C_p(X)$  が局所的性質である Pytkeev property をもてば、 $X$ は $\gamma$ -集合となるか？」という問題に対して、Tsaban と Zdomskyy は、実数の非可算部分集合 $X$ で $C_p(X)$ が strong Pytkeev property をもつ空間を見つければ、 $X$ が反例となることを示した。しかし、筆者は $cs^*$ -network の概念を利用して、 $C_p(X)$ が strong Pytkeev property をもてば $X$ は可算空間となることを示し、Tsaban と Zdomskyy の方向では上の問題は解決しないことを示した。またここでの議論の応用として、 $C_p(X)$ が $\chi$ -空間であれば $X$ は可算空間となることが得られ、Michael の同様な結果を大幅に改良した。〔雑誌論文⑥〕

(6) Arhangel'skii により導入された局所的性質  $k$ -Frechet Urysohn について、compact-open位相を入れた関数空間 $C_k(X)$ がこの性質をもつための必要十分条件を与えた。この際、compact集合からなる族に対して、strongly moving off の概念を新しく導入し利用した。更に応用として、 $C_k(X)$ が stratifiable(=M3), Baire空間であれば、 $C_k(X)$ は $M_1$ -空間となることを示した。この当時、 $C_k(P)$ 、 $P$ は無理数の空間、が $M_1$ -空間かどうか未解決であり、この結果は未解決の $M_3$ - $M_1$ 問題を考える上で有用な結果であったと思われる。〔雑誌論文⑧〕

(7) Bukovskyが導入した、連続関数列の擬正規収束に関する空間族 $QN$ -空間について、Scheepers は $C_p(X)$ が Arhangel'skii の局所的性質 $\alpha_1$ を満たすことと、 $X$ が $QN$ -空間であることは同値かという問題を提出した。この問題に対して、 $\gamma$ -shrinkability の概念を利用することによって肯定的に解決した。この際、 $C_p(X)$ が局所的性質 $\alpha_1$ を満たすための必要十分条件を $X$ の被覆的性質で与えた。また、Scheepers の weak sequence selection property に関する問題も肯定的に解決し、 $C_p(X)$ の weak sequence selection property に関する臨界濃度は $d$ であることも示した。〔雑誌論文⑨〕

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計12件)

① M. Sakai, The Ramsey property for

$C_p(X)$ , to appear in Acta Math. Hungar., 査読有.

② M. Sakai, Mizokami and Lin's conjecture on  $\alpha$ -CF\* pseudo-bases, Topology Appl., 査読有, 157(2010), 152—156.

③ M. Sakai, Selection principles and upper semicontinuous functions, Colloquium Math. 査読有, 117(2009), 251—256.

④ M. Sakai, H. Ohta, Sequences of semicontinuous functions accompanying continuous functions, Topology Appl., 査読有, 156(2009), 2683—2691.

⑤ M. Sakai, Menger subsets of the Sorgenfrey line, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, 137(2009), 3129—3138.

⑥ M. Sakai, Function spaces with a countable  $cs^*$ -network at a point, Topology Appl., 査読有, 156(2008), 117—123.

⑦ M. Sakai, Mapping theorems on  $\chi$ -spaces, Comm. Math. Univ. Calolinae, 査読有, 49(2008), 163—167.

⑧ M. Sakai,  $k$ -Frechet Urysohn property of  $C_k(X)$ , Topology Appl., 査読有, 154(2007), 1516—1520.

⑨ M. Sakai, The sequence selection properties of  $C_p(X)$ , Topology Appl., 査読有, 154(2007), 552—560.

⑩ M. Sakai, Weak-open maps and sequence-covering maps, Sci. Math. Japonicae, 査読有, 66(2007), 67—71.

〔学会発表〕(計8件)

① 酒井政美, The Ramsey property for  $C_p(X)$ , 一般位相幾何及び幾何学的トポロジーに関する研究, 2009年10月, 京都大学数理解析研究所.

② 酒井政美, Menger subsets of the Sorgenfrey line, 24th Summer Conference on Topology and its Applications, 2009年7月, Brno, Czech Republic.

③ 酒井政美, Totally paracompact spaces and remaining problems, General Topology Symposium, 2008年12月, 高崎経済大学.

④ 酒井政美, Mizokami and Lin's conjecture, Advances in Set-theoretic Topology, 2008年6月, International Centre for Scientific Culture "E. Majorana" School of Mathematics "G. Stampacchia", Italy.

⑤ 酒井政美, Function spaces with a

countable  $cs^*$ -network at a point,  
International Conference on Topology  
and its Applications 2007 at Kyoto,  
2007年12月, 京都大学.

- ⑥ 酒井政美, Around the strong Pytkeev  
property of function spaces, III  
Workshop on Coverings, Selections and  
Games in Topology, 2007年4月,  
Vrnjacka Banja, Serbia.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

酒井 政美 (SAKAI MASAMI)

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号: 60215598

### (2) 研究分担者

矢島 幸信 (YAJIMA YUKINOBU)

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号: 10142548

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: