

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540154

研究課題名(和文) グラフのゼータ関数とその拡張

研究課題名(英文) Zeta function of a graph and its generalization

研究代表者

佐藤 巖 (SATOU IWAO)

小山工業高等専門学校・一般科・教授

研究者番号：70154036

研究代表者の専門分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：応用数学、離散数学

1. 研究計画の概要

(1) digraphの重み付きBartholdiゼータ関数や重み付きBartholdi L-関数を導入し、その行列式表示を与える。

(2) 隣接行列を(1)とは異なるweighted matrixで置き換え、新たなゼータ関数、L関数を導入する。

(3) periodic simple graph, fractal graph等の無限グラフのゼータ関数を、無限グラフのBartholdiゼータ関数や無限digraphのBartholdiゼータ関数に拡張する。

(4) hypergraphのIharaゼータ関数を、Bartholdiゼータ関数に拡張し、新たなゼータ関数に一般化したい

(5) グラフの重み付きゼータ関数、重み付きL関数に関するセルバーグ型の跡公式を、正則グラフ、半正則2部グラフについて求め、極の偏角の分布について、考える。

2. 研究の進捗状況

(1) digraphの重み付きBartholdi関数と重み付きL関数を導入し、それらの行列式表示を与え、permutation voltage assignmentにより誘導される、一般の被覆digraphの重み付きゼータ関数を重み付きL関数の積で表した。論文として、Advances in Mathematicsに掲載された。

(2) 幾つかの一般のcoveringsに分割される、グラフの重み付きBartholdiゼータ関数の分解公式を導いた。また、幾つかの一般のcoveringsに分割される、digraphの特性多項式の分解公式を与えた。論文として、それぞれ、Discrete MathematicsとEuropean Journal of Combinatoricsに掲載された。

(2) Stormのhypergraphのゼータ関数の結

果を元に、Bartholdiゼータ関数を導入し、その行列式表示を与えた。また、半正則2部グラフのBartholdiゼータ関数の分解公式を導き、半正則hypergraphのBartholdiゼータ関数の分解公式を与えた。

さらに、hypergraph HのIharaゼータ関数について、edge matrixの変形による新しい行列式表示を与え、Stormの定理の別証明を与えた。また、hypergraph HのBartholdiゼータ関数について、edge matrixの変形と、Hのoriented line graphのPerron-Frobenius行列による行列式表示を与えた。ともに、論文として、Electronic Journal of Combinatoricsに掲載された。

(3) infinite tree T上のtorsionを持つ、群 Γ に対する、 $X=\Gamma\backslash T$ のゼータ関数についてのBassのimplicitな分解公式を明確化し、隣接行列をweighted matrixで置き換えて、グラフ、digraphに付いて、新たな(Bartholdi型の)ゼータ関数、L関数を導入し、その行列式表示を与えた。論文として、Linear Algebra and its Applications等に掲載された。

応用として、量子グラフの概念である、グラフGのscattering matrixのある行列式を、GのLaplacianの特性多項式で表示するSmilanskyの公式を、グラフの新たな(Bartholdi型の)ゼータ関数の行列式表示を用いて、別証明を導いた。その重み付き版についても、分解公式を導いた。さらに、Gのregular coveringのscattering matrixのある行列式や、その重み付き版について、分解公式を導いた。論文として、Electronic Journal of CombinatoricsとDiscrete Mathematicsに掲載された。

(4) digraph Dについて、(3)と異なる、新たな

重み付き Bartholdi ゼータ関数を定義し、その行列式表示を与え、第 2 種の重み付き Bartholdi ゼータ関数と一致することを示した。また、digraph D の別の新たな重み付き Bartholdi ゼータ関数を定義し、その行列式表示を与え、第 1 種の重み付き Bartholdi ゼータ関数と一致することを示した。論文として、Discrete Mathematics 等に掲載された。

(5) 無限グラフの一種である periodic simple graph, fractal graph の Bartholdi ゼータ関数を導入し、有限グラフのゼータ関数における手法を使って、von Neumann 環の作用素に関する行列式を用いる、行列式表示を与えた。論文として、Electronic Journal of Combinatorics 等に掲載された。

(6) グラフの complexity の類似である、digraph D の group covering の stochastic weighted complexity (有向全域木の arcs の重みの積の和)の分解公式を与え、 D の stochastic weighted complexity で表した。論文として、Linear Algebra and its Applications に掲載された。

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。研究を進めている過程で、物理の量子グラフとの関連が判明し、また、情報幾何の分野の渡辺、福水による edge ゼータ関数の新しい行列式表示がもたらされ、そこで展開された新しい手法を用いて、物理への応用を込めた、グラフゼータの新しい方向付けが可能になってきた。

4. 今後の研究の推進方策

(1) digraph の被覆 digraph のガロア理論を、voltage assignment の立場から考察し、被覆 digraph の重み付き Bartholdi 関数を再考する。

(2) digraph の scattering matrix を導入して、Smilansky の公式の digraph 版を導き、新たな digraph のゼータ関数を定義する。

(3) 関数解析の本を読んで、作用素の行列式について勉強し、新たな無限グラフの Bartholdi ゼータ関数の行列式表示を模索する。

(4) 2 部グラフの新たなゼータ関数、L-関数を導入し、hypergraph の 3 変数以上の新たな Bartholdi ゼータ関数を定義し、その行列式表示を与える。

(5) Smilansky や渡辺、福水によるグラフゼータに対する、新しい手法を用いて、今までに出てきたグラフゼータの新しい行列式表示を考える。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

① I. Sato, Bartholdi zeta functions of fractal graphs, Electronic Journal of Combinatorics (electronic), 16, 21 pp (2009), 有

② H. Mizuno, I. Sato, The scattering matrix of a graph, Electronic Journal of Combinatorics (electronic), 15, 18 pp (2008), 有

③ Y-B, Choe, J. H. Kwak, Y. S. Park, I. Sato, Bartholdi zeta and L -functions of weighted digraphs, their coverings and products, Advances in Mathematics, 213, 865-886 (2007), 有

④ I. Sato, Bartholdi zeta functions for hypergraphs, Electronic Journal of Combinatorics (electronic), 14, 9 pp (2007), 有

⑤ H. Mizuno, I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a digraph, Linear Algebra and Its Applications, 423, 498-511 (2007), 有

〔学会発表〕(計 5 件)

① 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 日本数学会応用数学分科会特別講演, 2010 年 3 月 24 日, 慶応大学

② H. Mizuno, I. Sato, The Ihara zeta function of a graph and its generalization, "Zeta Function", 2008 Moscow, 2008 年 12 月 3 日, The Independence University of Moscow

③ I. Sato, Bartholdi zeta functions for hypergraphs, 20th Workshop on Topological Graph Theory, 2008 年 11 月 26 日, Yokohama National University

④ I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a digraph, 14th Conference of the International Linear Algebra Society 2007, 2007 年 7 月 15 日, Shanghai University

⑤ H. Mizuno, I. Sato, Bartholdi zeta functions of branched coverings of digraphs, Kyoto International Conference on Computational Geometry and Graph Theory 2007, 2007 年 6 月 12 日, Kyoto University

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

〔その他〕