

機関番号：52201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540154

研究課題名(和文) グラフのゼータ関数とその拡張

研究課題名(英文) Zeta function of a graph and its generalization

研究代表者

佐藤 巖 (SATOU IWAO)

小山工業高等専門学校・一般科・教授

研究者番号：70154036

研究成果の概要(和文)：

我々は、先ず、いろいろなグラフや有向グラフのゼータ関数の一般化として、有向グラフの weighted Bartholdi ゼータ関数を導入して、その行列式表示を与え、系として、いろいろなグラフのゼータ関数の行列式表示を導いた。また、グラフや有向グラフの第2種 weighted (Bartholdi)ゼータ関数を取り扱った。

次に、被覆グラフの概念を有向グラフに拡張して、有向グラフの分岐被覆の特性多項式、ゼータ関数、Bartholdi ゼータ関数の分解公式を導いた。また、スターク&テラスの被覆グラフのガロア理論を、voltage assignment の立場から再考し、グラフの正則被覆グラフの商グラフの weighted Bartholdi ゼータ関数に関する分解公式を与え、有向グラフに拡張した。

さらに、Guido, Isola & Lapidus によつて得られた、無限グラフ(periodic simple graph, periodic graph, fractal graphs)の伊原ゼータ関数に関する結果を、Bartholdi ゼータ関数に拡張した。また、hypergraph の Bartholdi ゼータ関数を定義し、その行列式表示を与えた。

Smilansky によって定式化された、グラフの散乱行列に関する結果について、グラフの第2種 weighted ゼータ関数の行列式を用いた別証明を与えた。

最後に、有向グラフの weighted complexity に関する結果を、有向グラフの weighted ゼータ関数を用いて導いた。

研究成果の概要(英文)：

At first, we introduced the (first)weighted Bartholdi zeta function of a digraph as a generalization of various zeta functions of a graph or a digraph, and presented its determinant expression. As corollaries, we obtained determinant expressions for various zeta functions of a graph or a digraph. Furthermore, we treated the second weighted (Bartholdi) zeta functions of a graph or a digraph.

Next, we extended the notion of a regular covering of a graph to a digraph, and gave decomposition formulas for the characteristic polynomial, the zeta function and the Bartholdi zeta function of a ramified covering of a digraph. Furthermore, we reformulated the Galois theory of graph coverings by Stark and Terras by voltage assignments. As an application, we presented a decomposition formula for the weighted Bartholdi zeta function of a quotient of a regular covering of a graph, and generalized it to a digraph.

We extended the results on the Ihara zeta functions of infinite graphs(periodic simple graph, periodic graph, fractal graph). Furthermore, we defined the Bartholdi zeta function for a hypergraph, and gave its determinant expression.

By using a determinant expression of the second weighted zeta function of a graph, we obtained a new proof the result on the scattering matrix of a graph by Smilansky.

Finally, we obtained the results on the weighted complexities of a digraph by using the weighted zeta function of a digraph.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成19年度	800,000	240,000	1,040,000
平成20年度	400,000	120,000	520,000
平成21年度	400,000	120,000	520,000
平成22年度	400,000	120,000	520,000
年度			
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：応用数学、離散数学

1. 研究開始当初の背景

グラフのゼータ関数は、伊原(1966)による離散群のp-進セルバーグのゼータ関数から始まった。伊原はその逆数が多項式であることを示した(伊原の定理)。セール(1980)によって、伊原のゼータ関数が、正則グラフのゼータ関数であることが指摘された。それを受けて、砂田(1986)により、伊原ゼータ関数のグラフ理論的定義が確立され、伊原の定理のグラフ理論的証明が与えられた。橋本(1989)は半正則2部グラフのゼータ関数の行列式表示を与え、一般のグラフのゼータ関数の行列式表示は橋本(1990)、バース(1992)によって与えられた。スターク&テラス(1996)、小谷&砂田(2000)、フォータ&ザイルベルガー(1999)らによって、バースの定理の別証明が与えられた。デデキントのゼータ関数のアルティンのL-関数による分解公式のグラフ版は、スターク&テラス(2000)、水野&佐藤(2000)によって、独立に得られた。

グラフのゼータ関数の他のタイプのゼータ関数としては、スターク&テラス(1996)によるedgeゼータ関数、水野&佐藤(2004)による第1種weightedゼータ関数、小谷&砂田(2000)やボーエン&ランフォード(1970)による有向グラフのゼータ関数、ストーム(2006)によるhypergraphの伊原ゼータ関数がある。また、Bartholdi(1999)によって、2変数のゼータ関数(Bartholdiゼータ関数)が定義された。無限グラフについては、Guido, Isola & Lapidus(2008, 2009)によつて、無限グラフ(periodic simple graph, periodic graph, fractal graphs)の伊原ゼータ関数に関する結果がある。

我々は、digraphのBartholdiゼータ関数を導入し、その行列式表示を与え(2003)、グラフのcomplexity(全域木の個数)に関しては、グラフGの辺に重みを付け、Gのweighted complexityの概念を導入し、その行列式表

示を与えた(2003)。また、韓国のKwakグループと共同で、一般の被覆グラフのweighted complexityの分解公式を導いた(2007)。グラフの分岐被覆に関連して、幾つかの一般の被覆グラフに分割されるグラフのBartholdiゼータ関数の分解公式を与えた(2006)。

2. 研究の目的

先ず、弧に重みを付けた digraph の weighted Bartholdi関数を考え、正則被覆 digraphについて、その分解公式を求めたり、いろいろな他のタイプのグラフゼータについて、正則被覆グラフのゼータ関数の分解公式を求める。また、隣接行列をweighted matrixで置き換えて、新たなゼータ関数を導きたい。さらに、digraphのcoveringの概念を確立して、分岐被覆グラフや分岐被覆 digraphのゼータ関数を調べる。

Lapidus達が得た、periodic simple graph や fractal graph 等の無限グラフのゼータ関数を、無限グラフや無限 digraph の Bartholdiゼータ関数に拡張する。Storm や Hoffman, Deitmar がそれぞれ得た、hypergraph や、PGL3(F) (Fは非アルキメデス的局所体)の Bruhat-Tits building のゼータ関数を、Bartholdiゼータ関数に一般化する。

また、正則グラフと半正則2部グラフについてセルバーグ型の跡公式を導き、それらの weighted グラフゼータに対し、極の偏角の分布について、「半円則」の類似を示したい。さらに、いろいろなグラフゼータを利用して、類体論等の被覆グラフ版を模索する。例えば、弧に{1, -1}の重みを持つ、weightedゼータ関数と関連させて、balanced covering について、2次体が持つ構造と類似の結果を導きたい。

3. 研究の方法

・弧に重みを付けた digraph の weighted

Bartholdi 関数と weighted L 関数をを導入して、それらの行列式表示を与え、permutation voltage assignment により誘導される、一般の被覆 digraph の weighted Bartholdi ゼータ関数を weighted L 関数の積で表す。

- ・分岐被覆グラフのゼータ関数、Bartholdi ゼータ関数の分解公式を与える。

- ・digraph の covering の概念を確立して、分岐被覆 digraph のゼータ関数、Bartholdi ゼータ関数を調べ、その分解公式を求める。

- ・分岐被覆グラフや分岐被覆 digraph の weighted ゼータ関数、weighted Bartholdi ゼータ関数の分解公式を導く。

- ・infinite tree T 上の torsion を持つ群 Γ に対する、 $X = \Gamma \setminus T$ のゼータ関数に関する Bass の implicit な分解公式を明確化し、隣接行列を weighed matrix で置き換え、新たなゼータ関数、L 関数を導入し、それらの行列式表示を与える。

- ・グラフの新たなゼータ関数の Bartholdi ゼータ関数版、digraph の Bartholdi ゼータ関数版を考える。

- ・periodic simple graph や fractal graph 等の無限グラフのゼータ関数を、無限グラフの Bartholdi ゼータ関数や無限 digraph の Bartholdi ゼータ関数に拡張する。

- ・Deitmar&Hoffmann によって得られた、PGL₃(F) の Bruhat-Tits building のゼータ関数を、Bartholdi ゼータ関数に一般化したい

- ・Storm の hypergraph のゼータ関数の結果を、Bartholdi ゼータ関数に拡張する。

- ・スペクトル幾何の専門書を読んで、セルバーグの跡公式についての手法を勉強する。

- ・グラフの weighted ゼータ関数、weighted L 関数に関するセルバーグ型の跡公式を、正則グラフ、半正則 2 部グラフについて求める。

- ・正則グラフ、半正則 2 部グラフの weighted グラフゼータに対し、極の偏角の分布について、「半円則」の類似が成立するかどうか考える。

- ・一般の weighted ゼータ関数に対し、極の偏角の分布について、「半円則」の類似が成立するかどうか考える。

- ・一般のグラフのセルバーグ型の跡公式を考える。

- ・bipartite covering に関する Stark&Terras の結果を、 $\{1, -1\}$ の重みを持つ、weighted ゼータ関数と関連させて、balanced covering について、類似の結果を出す。

- ・グラフゼータと整数論のゼータ関数の類似性を利用して、整数論と被覆グラフの類似な性質を導き、2 次体の整数論の被覆グラフ版を考える。

- ・いろいろなグラフゼータを利用して、類体論等の被覆グラフ版を模索する。

- ・グラフゼータを含む領域の国際シンポジウムに出席して、最新の情報を手に入れる。

- ・成果が出たら、日本数学会、国際シンポジウム等で発表し、論文にまとめて投稿する。

4. 研究成果

弧に重みを付けた digraph の第 1 種の weighted Bartholdi ゼータ関数と第 1 種の weighted L 関数を導入し、それらの行列式表示を与え、permutation voltage assignment により誘導される、一般の被覆 digraph の第 1 種 weighted ゼータ関数を第 1 種 weighted L 関数の積で表した (2007)。また、グラフ G の正則被覆グラフ H の、被覆変換群 A の部分群 B による商グラフ H/B を、voltage assignment の立場から考察して、砂田のリーマン多様体のガロア理論並びに、Stark & Terras の被覆グラフのガロア理論の voltage assignment 版を展開し、その応用として、商グラフ H/B の第 1 種 weighted Bartholdi L 関数を、 G の第 1 種 weighted Bartholdi L 関数による表現を与えた。また、被覆グラフのガロア理論の voltage assignment 版を digraph の covering に拡張して、digraph の第 1 種 weighted Bartholdi L 関数に適用した (2010)。

第 1 種の weighted ゼータ関数と異なる weighted ゼータ関数としては、infinite tree T 上の torsion を持つ、群 Γ に対する、 $X = \Gamma \setminus T$ のゼータ関数についての Bass の implicit な分解公式を明確化し、隣接行列を weighed matrix で置き換えて、グラフや digraph について、第 2 種の weighted Bartholdi ゼータ関数、L 関数を導入し、その行列式表示を与えた。正則被覆グラフや正則被覆 digraph の第 2 種の weighted Bartholdi ゼータ関数を、base graph や base digraph の第 2 種の weighted Bartholdi L 関数の積で表した (2007)。また、digraph D について、新たな weighted Bartholdi ゼータ関数を定義し、その行列式表示を与え、第 2 種の weighted Bartholdi ゼータ関数と一致することを示した (2009)。さらに、digraph D について、前者と異なる、別の新たな weighted Bartholdi ゼータ関数を定義し、その行列式表示を与え、第 1 種の weighted Bartholdi ゼータ関数と一致することを示した (2010)。

hypergraph のゼータ関数については、Storm の hypergraph のゼータ関数の結果を元に、Bartholdi ゼータ関数を導入し、その行列式表示を与えた (2007)。また、hypergraph H の伊原ゼータ関数について、edge matrix の変形による新しい行列式表示を与えて、Storm の定理の別証明を与え、 H の Bartholdi ゼータ関数について、edge matrix の変形と、 H の oriented line graph の Perron-Frobenius 行列による行列式表示

を与えた(2009)。

Guido, Isola & Lapidusによって得られた、無限グラフの一種であるperiodic simple graph, periodic graph, fractal graphの伊原ゼータ関数を、それぞれ、Bartholdiゼータ関数へ拡張し、有限グラフのゼータ関数における手法を使って、von Neumann環の作用素に関する行列式を用いた行列式表示を与えた(2008, 2009, 2011)。特に、periodic simple graphのBartholdiゼータ関数の行列式表示は、Guido, Isola & Lapidusと、独立に与えた。

物理と関係する部分としては、quantum graphの概念である、グラフGのscattering matrixのある行列式を、GのLaplacianの特性多項式で表示するSmilanskyの公式を、Gの第2種のweightedゼータ関数の行列式表示を用いた新しい証明を与え、Smilanskyの公式の重み付き版についても、グラフゼータにおける手法を使って、別証明を導いた(2008)。また、Smilanskyの公式をグラフGの正則被覆グラフへの拡張を考え、GのBartholdi型ゼータ関数の行列式表示を用いて、Gの正則被覆グラフのscattering matrixのある行列式の分解公式を導いた(2010)。さらに、Gの正則被覆グラフのscattering matrixの重み付き版についても、その分解公式を得た(2010)。

2008年、The Independent University of Moscowから招待を受け、第2回”Zeta Functions II, Moscow, Russia”に参加して、”The Ihara zeta function of a graph and its generalization”というタイトルにて、グラフゼータ関数のsurveyについて、口頭発表し、2010年日本数学会春季年会の応用数学分科会において、”グラフのゼータ関数の行列式表示”というタイトルにて、特別講演をした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

- [1] I. Sato, Bartholdi zeta functions of periodic graphs, to appear in Linear and Multilinear Algebra.
- [2] S. Negami and I. Sato, Weighted zeta functions for quotients of regular coverings of graphs, Adv. Math. 225 (2010), 1717–1738.
- [3] H. Mizuno and I. Sato, Weighted

scattering matrices of regular coverings of graphs, Linear and Multilinear Algebra 58 (2010), 927 – 940.

- [4] H. Mizuno and I. Sato, Scattering matrices of regular coverings of graphs, Discrete Mathematics 310 (2010), 782–791.
- [5] I. Sato, Some proof of a formula for the weighted zeta function of a digraph, Far East J. Math.Sci. 36 (2010), no.1, 73–87.
- [6] H. Mizuno and I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a digraph. III, Far East J. Math.Sci. 36 (2010), no.1, 57–72.
- [7] I. Sato, A new determinant expression of the zeta function for a hypergraph, Electronic J. Combin. 16 (2009), no. 1, Research Paper 132, 13 pp.
- [8] H. Mizuno and I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a digraph II, Discrete Math. 309 (2009), no. 10, 3197–3204.
- [9] I. Sato, Bartholdi zeta functions of fractal graphs, Electronical J. Combin. 16 (2009), no. 1, Research Paper 30, 21 pp.
- [10] I. Sato, Some weighted zeta functions of digraphs, Adv. Appl. Discrete Math. 2 (2008), no. 1, 1–16.
- [11] I. Sato, Bartholdi zeta functions of periodic simple graphs, Far East J. Math. Sci. 30 (2008), no. 2, 233–251.
- [12] I. Sato, Spectra of Laplacian matrices of semiregular bipartite graphs, Far East J. Math.Sci. 30 (2008), no. 3, 557–566.
- [13] I. Sato, The stochastic weighted complexity of a group covering of a digraph, Linear Algebra Appl. 429 (2008), no. 8–9, 1905–1914.
- [14] H. Mizuno and I. Sato, The scattering

matrix of a graph, *Electronical J. Combin.* 15 (2008), no. 1, Research Paper 96, 16 pp.

[15] I. Sato, Weighted Bartholdi zeta functions of graph coverings, *Discrete Math.* 308 (2008), no. 12, 2600–2606.

[16] H. Mizuno and I. Sato, Weighted Bartholdi zeta functions of digraphs, *Far East J. Math. Sci.* 27 (2007), no. 2, 323–344.

[17] H. Mizuno and I. Sato, Weighted Bartholdi zeta functions of some graphs, *Far East J. Math. Sci.* 27 (2007), no. 2, 301–321.

[18] I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a graph, *Int. J. Algebra* 1 (2007), no. 6, 269–281, (electronic).

[19] Y.-B. Choe, J. H. Kwak, Y. S. Park and I. Sato, Bartholdi zeta and L-functions of weighted digraphs, their coverings and products, *Adv. Math.* 213 (2007), no. 2, 865–886.

[20] H. Mizuno and I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a digraph, *Linear Algebra Appl.* 423 (2007), no. 2–3, 498–511.

[21] A. Deng, I. Sato and Y. Wu, Homomorphisms, representations and characteristic polynomials of digraphs, *Linear Algebra Appl.* 423 (2007), no. 2–3, 386–407.

[22] A. Deng, I. Sato and Y. Wu, Characteristic polynomials of ramified uniform covering digraphs, *European J. Combin.* 28 (2007), no. 4, 1099–1114.

[23] I. Sato, Bartholdi zeta functions for hypergraphs, *Electronical J. Combin.* (2007), (electronic).

[24] I. Sato, Zeta functions and complexities of a semiregular bipartite

graph and its line graph, *Discrete Math.* 307 (2007), no. 2, 237–245.

[25] J. H. Kwak, Y. S. Park and I. Sato, Weighted complexities of graph products and bundles, *European J. Combin.* 28 (2007), no. 1, 228–245.

[学会発表] (計 27 件)

[1] 佐藤巖, グラフのゼータ関数と scattering matrix, 第 3 回福島応用数学研究集会, 2011, 3.

[2] 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 横浜国立大学今野研究室セミナー, 2011. 2.

[3] 佐藤巖, 樋口雄介, A balanced signed digraph, 2010 年度 応用数学合同研究会 (龍谷大), 2010. 12.

[4] 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 離散数学 in 小山, 2010. 11.

[5] 水野弘文, 佐藤巖, Scattering matrices of regular coverings of graphs, 「位相幾何学的グラフ理論」研究集会 (横浜国大), 2010. 11.

[6] 水野弘文, 佐藤巖, Scattering matrices of graphs, 日本数学会応用数学分科会, 2010, 9.

[7] 佐藤巖, Weighted zeta functions of graph coverings, 離散数学とその応用研究会 (高知大), 2010. 8.

[8] H. Mizuno and I. Sato, The Bartholdi zeta function of a hypergraph, The international conference on Algebraic and Geometric Combinatorics (Gyeong Ju in Korea), 2010. 7.

[9] 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 日本数学会応用数学分科会特別講演, 2010. 3.

[10] 佐藤巖, The scattering matrix of a graph, 岡村治子先生退職記念研究集会 (甲南

- 大学), 2010. 3.
- [11] Y-B, Choe, J. H. Kwak, Y. S. Park and I. Sato, Weighted Bartholdi zeta functions of digraphs, The 21 th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama University, 2009. 11.
- [12] 佐藤巖, Bartholdi zeta functions for hypergraphs, 日本数学会応用数学分科会, 2009. 9.
- [13] J. H. Kwak, Y. S. Park and I. Sato, Weighted complexities of graph products and graph bundles, 「離散数学とその応用研究集会 2009」(茨城大学), 2009. 8.
- [14] 佐藤巖, グラフのゼータ関数, 室蘭工業大学談話会, 2009. 6.
- [15] 水野弘文, 佐藤巖, A new Bartholdi zeta function of a digraph, 日本数学会応用数学分科会, 2009. 3.
- [16] 佐藤巖, Weighted zeta functions of graph coverings, The 20 th Workshop on Topological Graph Theory+ α (琉球大学), 2009. 3.
- [17] H. Mizuno and I. Sato, The Ihara zeta function of a graph and its generalization, “Zeta functions”, 2008, Moscow (The Independent University of Moscow), 2008. 12.
- [18] I. Sato, Bartholdi zeta functions of hypergraphs, The 20 th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama University, 2008. 11.
- [19] 佐藤巖, Zeta functions and complexities of a semiregular bipartite graph and its line graph, 日本数学会応用数学分科会, 2008. 9.
- [20] 佐藤巖, Zeta functions and complexities of a semiregular bipartite graph and its line graph, 「離散数学とその応用研究集会 2008」(茨城大学), 2008. 8.
- [21] 水野弘文, 佐藤巖, A new Bartholdi zeta function of a digraph, 「組合せ論・離散数学及びその周辺ワークショップ」(電通大), 2008. 7.
- [22] 佐藤巖, Weighted Bartholdi zeta functions of graphs, 日本数学会応用数学分科会, 2008. 3.
- [23] 佐藤巖, Weighted Bartholdi zeta functions of graphs, 「位相幾何学的グラフ理論」研究集会(横浜国大), 2007. 11.
- [24] 水野弘文, 佐藤巖, Bartholdi zeta functions of some graphs, 日本数学会応用数学分科会, 2007, 9.
- [25] 水野弘文, 佐藤巖, Bartholdi zeta functions of some graphs, 「離散数学とその応用研究集会 2007」(下呂温泉), 2007. 8.
- [26] I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a digraph, 14 th Conference of International Linear Algebra Society (Shanghai Uni., China), 2007. 7.
- [27] H. Mizuno and I. Sato, Bartholdi zeta functions of branched coverings of digraphs, Kyoto International Conference on Computational Geometry and Graph Theory (Kyoto Univ., Japan), 2007. 6.
- [その他]
ホームページ等
6. 研究組織
(1) 研究代表者
佐藤 巖 (SATOU IWAO)
小山工業高等専門学校・一般科・教授
研究者番号 : 70154036