様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年６月１６日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：19540155
研究課題名（和文）　「次元の一致」の表現論的・環論的・組合せ論的研究

研究課題名（英文）　Coincidence of dimension - its representation theoretical aspect, ring theoretical aspect and combinatorial aspect.

研究代表者
森田　英章（HIDEAKI MORITA）
室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90435412

研究成果の概要（和文）：Garsia-Haiman 加群は対称群の二重次数付き加群であるが、一方の次数を固定した次数部分加群を考えると、その各々が Springer 加群と同様に「次元の一致」という性質をみたす。この次元の一致を、ある特別な場合に表現論的に解釈することに成功した。また、それに伴い、Macdonald 多項式が１のベキ根でしめす「分解公式」と「plethysm 公式」の証明にも成功した。

研究成果の概要（英文）：A representation theoretical interpretation is obtained for the coincidence of dimension of the singly graded submodules of Garsia-Haiman modules corresponding to hooks. It is also obtained the factorization formula and the plethystic formula for the corresponding Macdonald polynomials at roots of unity.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：代数学、組合せ論

１．研究開始当初の背景

Kraskiewicz - Weyman らによる対称群の事由 Lie 加群上での表現、いわゆる Lie 表現の理論は、対称群の余不変式環のある種の部分加群の理論として捉えることができる。対称群の次数を n としたとき、余不変式環の斉次空間のうち、その次数が n を法として互いに合同なものたちの直和を考えと、その residue が n と互いに素な場合、これらの部分加群は、Lie 加群と同型となることが示される。この結果を別の視点から眺めると、そこには大変興味深い組合せ論的性質が現れていることが分かる。すなわち、余不変式環の斉次空間の次数のなす数列、いわゆる Betti 数列に対し､n を法として互いに合同な次数をもつ成分の和をとれば、その residue が n と互いに素であれば一定となっていることを示している。ところがこの現

象はそれだけに留まらず､実は residue が互いに素ではない部分和の値も、その一定値に等しいことが実例計算から分かる。この現象を、Betti 数列（もしくは一般の有限数列）の「n を法とする次元の一致」とよぶことにしよう。すると、Kraskiewich-Weyman の結果は、n 次対称群の（余不変式環の）Betti 数列に対し、その n を法とする次元の一致の一部分に表現論的な解釈を与えた結果であると捉え直すことができる。それでは、それ以外の residue の場合はどうなのか？実のところ、Kraskiewicz-Weyman の結果は、表現論的にはそれに先立つ Foulkes の巡回指標の理論に包摂されており、彼らの結果は、Foulkes の理論に Lie 表現の理論が実現されていてることを指摘したものと考えることができる｡そして､この Foulkes の理論を念頭おけば､n 次対称群の Betti 数列がもつ n を法とした次元の一致は、対応する余不変式環の部分加群が､長さ n の巡回部分群の既約表現から誘導される事実をもって、表現論的には解釈され直すことに気がつく。巡回部分群の既約表現は、すべからく 1 次元であるから、このことにより、件の次元の一致の表現論的解釈とかんがえることが出来る。

では、n 以外で法をとったらどうなるか？この問がその後に続く「次元の一致」の研究の発端である。いくつかの計算可能な実例においては、n 次対称群の余不変式環の Betti 数列は, n 以下の任意の自然数で法をとっても、つねにその部分和は一定値になることが確かめられた。これはその後一般に証明されることになり、ここにおいて n 次対称群の Betti 数列の次元の一致の状況が明らかとなった。すなわち、k を n より大きくない任意の自然数とすれば､n 次対称群の Betti 数列は k を法とした次元の一致を持つ事が一般に証明されたことになる。そうすれば、次の問題としては, Foulkes や Kraskiewicz-Weyman にならい、その表現論的解釈を与えること当然なろう。この問題は実際にその後 Morita-Nakajima により解決された。また、余不変式環をさらに一般化したものに Springer 加群とよばれるものがある。これは、n の分割に対応して定まる n 次対称群の有限次元次数付き加群である。ここでも同様に Morita によって次元の一致の状況が明らかにされ、その表現論的解釈が与えられている。

２．研究の目的

Garsia-Haiman らにより導入された対称群の次数付き加群、Garsia-Haiman 加群に対しても、Springer 加群同様に次元の一致の状況を確定し、その表現論的解釈を与えることを目標とする。

Garsia-Haiman 加群は､Springer 加群と同様に n の分割に対応して定まる n 次対称群の次数付き加群である。これは Macdonald 多項式に対する表現論的・組合せ論的なある予想の解決のため、Garsia と Haiman によって導入された対称群の二重次数付き加群である。よって、「次元の一致」と一言で言っても意味に曖昧な点が残るので、そこを明確にしておくと、二つある次数成分の内、一方を固定した際生じる（一重）次数付き部分加群を考え、その各々に対して余不変式環や Springer 加群と同様に次元の一致の表現論的解釈を与えよう、という問題である。この問題の解決を、その背後にある Macdonald 多項式に関する対称関数論的な諸々の性質も含め証明することを目的とする。

３．研究の方法

Garsia-Haiman 加群の次元の一致の表現論的解釈は、その次数指標が１の冪根で示す組合せ論的・対称関数論的振る舞いがその本質を担う。また、次数指標は、Macdonald 多項式とベキ和対称関数の内積値として実現されるので、このことは Macdonald 多項式のパラーメターに１のベキ根を代入したときの振る舞いと密接に関連する。以上をもって、問題は Macodnald 多項式のベキ根における組合せ論的な性質、およびそれを用いて、Garsia-Haiman 加群の次数指標の期待される性質を証明すること、この２点に集約される。

Macdonald 多項式は自然数の分割に対して定義される、パラメーターを二つ持った対称多項式である。その二つのパラメーターのうち、第一パラメーターを 0 におくと、こちらも Hall-Littlewood 多項式とよばれる対称多項式となる｡すなわち､Macodnald 多項式は Hall-Littlewood 多項式の２パラメーター化とでもいうべきものであるが、この Hall−Littlewood 多項式とベキ和対称関数との内積をとったものが、いわゆる Green 多項式というもので、これは Springer 加群の次数指標を与えることが知られている。従って、Macdonald 多項式とベキ和対称関数との内積として定まる２変数多項式を次数指標にもつような対称群の次数加群が存在するか否かを問うのは自然な流れであり、それに肯定的に答えたのが Garsia-Haiman である。よって、彼らの構成した、いわゆる Garsia-Haiman 加群は、ここで定義された２変数多項式をその次数指標にもつことは、もとより保証されていることを注意しておきたい。ところで、Hall-Littlewood 多項式とベキ和関数との内積に Green 多項式という名がある事を受け、ここでは Macdonald 多項式とベキ和関数との内積値を「２変数の

Green 多項式」とよぶことにしよう。ただ、今後１変数の Green 多項式はほとんど登場しないので、単に Green 多項式とよべばそれは２変数の Green 多項式を意味するものとをする。

さて、Garsia-Haiman 加群の二つの次数のうち、第一次数をある一定値に固定して得られる部分加群をひとまず「周辺部分加群」とよぶことにする。我々がここで問題にするのは、これら周辺部分加群が各々示す次元の一致の状況、およびその表現論的解釈を与える事である。これは Springer 加群の場合と同様に、その次数指標が１のベキ根で満たす再帰的関係式を示すことと同値である。ところで、周辺部分加群の次数指標は、その構成法から、Green 多項式の第二変数に関する係数として把握されることから、ここでは一つ一つの周辺部分加群をばらばらに扱うことはせず、まとめて考えるほうが効率的である。よって、問題は Green 多項式の第一変数に１のベキ根を代入したさい、期待される再帰的関係式が得られるか、ということになる。一変数の場合と同様、二変数の場合も Green 多項式はパラメーター付き対称関数とベキ和関数の内積値として実現されているので、問題はそのパラメーター付き対称関数、すなわち Macdonald 多項式のベキ根での挙動にその本質を有する。

いま、Green 多項式に期待される１のベキ根における再帰的関係式を、もとの Macodnald 多項式の性質として捉え直せば、そこには一変数の場合に「分解公式」と「plethysm 公式」とよんだ公式の２パラメーター類似の成立を期待すべきことが分かる。この二つが示されれば、Green 多項式の再帰的関係式は、ある一定の手続きを経ることにより従うことはわかるので、問題はひとまずこれらの二つの公式を証明することに落ち着くことになる。ただし、これらの公式から Green 多項式の再帰的関係式を導く際の「一定の手続き」のなかに、次元の一致の表現論的な解釈を与える際の諸々の具体的な作業が含まれてくることになることを注意しておく。

４．研究成果

Macdonald 多項式の分解公式および plethysm 公式を証明することに成功した。および、それらを用いることにより、「鈎」とよばれる分割に対応する Garsia-Haiman 加群の次元の一致の状況、およびその表現論的解釈を与える事に成功した。

Macdonald 多項式は、分割に対して定義される対称多項式である。いま、分割の成分の個数を d としたとき、Macdonald 多項式の第２パラメーターに１の d 乗根を代入することを考える。このとき、この d 乗根の位数に対応して、分割がいくつかの部分分割の和集合に分けられ、それら部分分割各々に対応する Macodnald 多項式の積として、もとの Macodnald 多項式が表される。これが分解公式の内容である。また、いま分割としてある一定成分 r が d 個並んだ分割を考える。このとき、対応する Macdonald 多項式に 1 の d 乗根を代入したとき、それがベキ和対称関数と完全対称関数の plethysm を用いてい表せることが示させる。これが plethysm 公式の内容である。

次元の一致の表現論的解釈とは、Garsia-Haiman 加群を考える際に定めた分割、および次元の一致を与える自然数 l に対し、対称群のある部分群を構成することから始まる。そして、その部分群の l 個の加群を構成し、それらを母群の表現まで誘導した際に、Garsia-Haiman 加群の周辺部分群と同型となることを要請する。その際、部分群の l 個の加群の線形空間としての次元が互いに等しいように構成しておけば、それらから誘導される周辺部分群の次元も必然的に一致する。このことをもって、次元の一致の表現論的解釈とよんでいる訳である。我々の分解公式は、この表現論的解釈を構成する際の、部分群の設定の段にその本質的な役割を果たし、plethysm 公式は周辺部分加群と誘導加群との同型を保証していると捉えることができる。これら分解公式と plethysm 公式は、Morita と Descouens の共同研究により肯定的に解決された。

さて、Macdonald 多項式の分解公式と plethysm 公式が得られれば、Green 多項式の再帰的関係式はすぐに従う。問題は、この関係式が表す表現論的な内実を、実際に表現空間を構成するなど肉付けすることにある。いま、分割として鈎を考える。これは第一成分以外の成分が全て１となっている分割で、その Young 図形を考えるとちょうど鈎型になっているのでその名がついている。今回の補助金による研究では、この鈎に対応する Garsia-Haiman 加群に対し、その次元の一致の表現論的解釈が得られている。部分群は Springer 加群の場合と同様、l に対して構成される対称群のある Young 部分群と、これも l に応じて構成される巡回部分群の半直積として構成される。また、部分群の次元が互いに等しい l 個の加群は、この Young 部分群に付随する Garsia-Haiman 加群の各斉次部分加群に、 l 次巡回群の既約表現によりある種のヒネリをいれて構成する。先にも述べたように、巡回群の既約表現は１次表現なので、これら l 個の加群の次元は互いに相等しいことは、この構成法よりすぐに従う。そして、件の Green 多項式の再帰的関係式は、考えている Garsia-Haiman 加群の周辺部分加群が示す次元の一致は、これら l 個

の部分加群からの誘導をもって解釈することができることを示すものである。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）
① H. Morita, A. Wachi and J. Watanabe, Zero-dimensional Gorenstein algebras with the action of the symmetric group, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 査読有, 121 (2009), pp. 45-71.
② F. Descouens and H. Morita, Factorization formulas for Macdonald polynomials, Euro. J. Combin. 査読有, 29 (2008), pp. 395-410.
③ H. Morita, Garsia-Haiman modules for hook partitions and Green polynomials with two variables, J. Alg 査読有, 319 (2008), pp. 235-247.
④ H. Morita, Green polynomials at roots of unity and Springer modules for the symmetric groups, Adv. Math. 査読有, 212 (2007), pp. 277-292.
⑤ H. Morita, Decomposition of Green polynomials of type A and Springer modules for hooks and rectangles, Adv. Math. 査読有, 210 (2007), pp. 479-497.

〔学会発表〕（計４件）
① H. Morita, Garsia-Haiman modules for hooks and its graded characters at roots of unity, Combinatorics and Representation Theory, Nagoya University, ２００８年９月４日
② 森田英章, Garsia-Haiman modules and modified Macdonald polynomials at roots of unity, 第１１回代数群と量子群の表現論研究集会, 岡山大学, ２００８年５月２８日.
③ 森田英章‐和地輝仁‐渡辺純三, The differential module of the polynomial ring with the action of the symmetric group, 第２９回可換環論シンポジウム, 愛知県厚生年金会館ウェルシティなごや, ２００７年１１月１９日－２２日.
④ H. Morita, A combinatorial property of the Garsia-Haiman modules and the Green polynomials with two variables, Northern Workshop in representation theory of Lie groups and Lie algebras, Hokkaido University, Sapporo, March 9, 2007.

６．研究組織
(1)研究代表者

森田　英章（MORITA HIDEAKI）
室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90435412