

平成21年5月26日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007年度～2008年度

課題番号：19540160

研究課題名（和文） 弾性波散乱の逆問題に関する数理解析

研究課題名（英文） Mathematical Analysis for Inverse Scattering Problems of Elastic Waves

研究代表者

曾我 日出夫（SOGA HIDEO）

茨城大学・教育学部・教授

研究者番号：40125795

研究成果の概要：当初の目的である「逆問題を数理的に解析し、数学的構造を明らかにすることについて、次の4つの成果を得ることができた。(1) 複素積分を使った新しい弾性波の表示法を開発できた。(2) 弾性体の等方性への摂動に対する影響をRayleigh波について具体的に調べることができた。(3) 弾性体のある逆問題に関する数値計算法を開発できた。(4) 波動のエネルギー減衰について、新しい評価式を得ることができた。しかしながら、研究開始当初の目的の一部については、期待通りの結果を得るところには至らなかった。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式 逆問題 偏微分方程式 弾性方程式 散乱 複素積分

1. 研究開始当初の背景

これまで本研究代表者は、弾性方程式に対して、Lax-Phillips型散乱理論が構成できることや逆問題の基礎となる散乱核表現式が得られることなどを明らかにしてきた。さらに、連携研究者の川下美潮氏（広島大学）などと共同で、弾性波固有のRayleigh波の散乱について、数学的な解析を行ってきた。

これらの成果をもとにして、工学的な逆問題について、数学的な視点から解析し、工学的研究の背後にある法則性を究明しよ

うと考えた。特に、表面波を利用した工学的実験や人工地震による地層探査に関連のある問題を取り上げようと考えた。

2. 研究の目的

本研究は、弾性波動方程式で表示される現象を扱うものであり、以下の通り、工学に関連した逆問題を数学的な視点から解析しようとするものである。中心的なテーマは次の通りである。

(1) 表面波を使った物体探査や地震波の地層探査を想定した逆問題を数理的に解析し、数学的構造を明らかにする。

(2) この逆問題における解像度と波の種類(波長、表面波、内部波等)の選択との関係を数理的に解析する。

特に、散乱波の具体的な表示法を開発し、それを逆問題に利用することを目指した。

3. 研究の方法

全体的に、理論的な解析を行うグループと応用的な解析を行うグループに分かれ、適時打ち合わせをしながら進めた。前者のグループは、本研究代表者の曾我、連携研究者の川下(広島大学)、千葉(東京工科大学)、梅津(茨城大学)で構成し、後者は連携研究者の田沼(群馬大学)、野崎(茨城大学)、代田(茨城大学)で構成した。全体の統括は曾我が行った。グループ内では随時連絡を取り合い、毎年2~3回全員で研究集会を開催した。

2007年度は、基本事項の整理と課題の明確化に重点を置き、次のことを目指した。

- (1) 実際の探査をモデル化し、今後取り組むべき逆問題を設定する。
- (2) 既知の弾性波の表示法(式)を整理し、その有効性を検討する。
- (3) この逆問題の抽象的(数学的)な意味での適切性や今後必要となる数学上の手法を開発する。

2008年度は、前年度に設定した逆問題について次のことを目指した。

- (4) 逆問題の一意性、安定性、再構成法などについての数学的な諸理論を作る。
- (5) 限定的な条件の下で、数値解析的な分析と理論的な解析を行う。
- (6) 前年度得た弾性波の表示法のアイデアをさらに詰め、その有効性を検討する。

4. 研究成果

研究成果について、主要な順から列挙説明する。

(1) 上記「3. 研究の方法」の(2)(6)に関わる成果として、表面を伝わる Rayleigh 波に適用可能な弾性波の表示法を開発できたことがある。これは、定数係数の方程式について数年前に得られていたものが出発点に

なっている。変数係数への拡張には本質的な障害があつてこれまで成功していなかった。

基本的なアイデアは、次の通りである。弾性波動方程式の境界値問題

$$L(x, y, D_x, D_y)u(x, y) = 0 \text{ in } x > 0, y \in \mathbf{R}^n,$$

$$u|_{x=0} = g(y)$$

の解 $u(x, y)$ は、次の積分を使って近似できるように思える。

$$\int e^{iy\xi} \oint e^{ixz} L(x, y, z, \xi)^{-1} dz \hat{g}(\xi) d\xi$$

z に関する積分の経路を、行列 $L(x, y, z, \xi)^{-1}$ の極のいくつかを囲むように取り、その留数を計算することによって、さまざまなモード(例えば Rayleigh 波モード)の波を表示できるのではないかというのがアイデアである。このことをきちんと証明できたことが成果である。この証明の原型は、発表論文[1]に説明されている。

従来、境界近くの弾性波の表示法には、Fourier 積分作用素の方法に Poisson 作用素のものを組み合わせた方法が一般的であった。この方法は、波の非常に詳しい情報を与えるものではあるが、適用の制約条件が強いものであった。本研究の表示法は、複素積分を使った新しい方法で、この Fourier 積分作用素によるものとは全く違ったアイデアによるものである。さらに、Fourier 積分作用素によるものに比べて、制約条件が少なくなっており、適用の範囲がかなり広がった。ここでの表示法は本研究周辺独自のものであり、国内外に類似のものはない。

本研究の表示法は、Fourier 積分作用素の方法では表示できなかった波の散乱状況が具体的に表せるものと期待される。この期待のもとで、この表示法を逆問題の解析に応用しようと努力した。しかし、ある程度の見通しを付けることはできたが、具体的な成果を得るには至らなかった。継続して研究することを今後の課題としたい。

(2) 上記「3. 研究の方法」の(1)(3)に関わる成果として、弾性体の等方性に摂動が加わったとき、Rayleigh 波に現れるさまざまな影響を具体的に表示できたことである。これは、弾性体の非等方性が等方弾性テンソルからの摂動によって与えられるという発想の下で得られたものである。

弾性体表面を伝わる Rayleigh 波において、polarization vector の縦波成分の最大

値と横波成分の最大値の比である polarization ratio およびそれらの成分間の位相変化 (phase shift) が、どのように変化するかを摂動公式として導いた。すなわち、弾性テンソルの非等方部分のうち、どの成分が Rayleigh 波の polarization ratio および phase shift の一次摂動に影響するかを明確にし、その寄与の仕方を explicit な公式で表示した。これらの公式は、非等方弾性体方程式に対する Stroh formalism を応用することで得られる。

上記の結果は、本研究の討論会での議論が動機付けとなり、連携研究者の田沼一実氏とその協力者が導出した(論文[2]に発表)。田沼氏とは、従来から本研究代表者と協力関係にあり、逆問題の具体的な解析、特に非等方性を考慮した分析についていろいろな寄与を受けている。田沼氏は、国内外において、この方面の第一人者であり、今回の成果もされならぬはのすぐれたものである。ここで試みた非等方性を Rayleigh 波に焦点をあてて詳しく調べた研究は従来なかったもので、先駆的な研究といえる。

今回の結果は Rayleigh 波の観測から弾性体の非等方性や残留応力を決定するという逆問題に利用できること期待される。非等方性を取り上げた逆問題は、実験的にも数学的にもあまり研究されておらず、得られた公式を逆問題に活用しようとする努力した。しかし、残念ながら期間内に十分な結果を得るところには至らなかった。

(3) 上記「3. 研究の方法」の(1)(3)(5)に関わる成果として、弾性体のある逆問題に関する数値計算法を開発できたことがある。すなわち、コンクリートと鉄の合成梁に対する接合部に存在する欠陥を同定するという逆問題に対して、具体的な数値計算法を開発した。この結果は、本研究代表者と連携研究者の代田健二氏との討論が動機となり、代田氏とその協力者が導出した(論文[3]に発表)。

ここでの逆問題は、ある種の波を入射させて構造物の欠陥などを知らうとするものである。具体的に欠陥の位置などを特定する計算法を与えている。このような具体性のある解析は最近盛んになったもので、その中で今回のものは先進的なものである。

ここで開発した計算法は、さらに広い場合に適用可能であり、別の設定の逆問題に応用するよう議論した。しかし、まとまった結果を得るのは今後の課題として残ることとなった。

(4) 上記「3. 研究の方法」の(1)(3)に関わる成果として、波動のエネルギーがどのような部分に集中し、どのように減衰していくかを詳しく解析した。これは、3次元以上の外部領域において Dirichlet または Neumann 混合問題を考えたとき、解の局所エネルギーがある程度速く減衰すれば、ある種の精密な重み付きエネルギー評価が得られることを示したものである。

この結果は、本研究の討論会が動機付けとなり、連携研究者の川下美潮氏が中心となって導出した。

エネルギーの減衰を詳しく知ることは、波の散乱の逆問題を解析する上で極めて重要なことである。ここでのエネルギー評価式に類するものは他にも既に得られていたが、偶数次元と Neumann 条件に対しては新しいものである。

ここでの方法は、最も焦点としている弾性方程式に適用可能と思われたので、それを試み、解決の見通し付けることが出来た。また、今後その結果を逆問題等に活用することが期待される。

以上、全体として、当初の目的である「逆問題を数理的に解析し、数学的構造を明らかにする」ことについては十分な成果を得ることができた。しかしながら、「逆問題における解像度と波の種類選択との関係を数理的に解析する」ことについては、一定程度の考察はできたが、最終的な結果を得るところには至らなかった。この解析には、低周波領域を含む双曲型方程式の解の表示を導出し、さらに本研究より一層根本的な解析をする必要があるように思われる。この方面の究明は当初考えていたよりはるかに難しいことが分かった。

今後の展望として、まず、上記(1)での成果を、波の散乱を使って境界近くの物質の状況を知るといった具体的な逆問題に利用することが考えられる。それは工学的にも新しい知見を与えることになるだろう。これについては恐らく現在得ている手法で実現できると予想される。しかし、十分な成果が得られなかった「逆問題における解像度」等についてはより根本的な解析を行わないと進展しないと思われる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計3件)

[1] H. Soga: Construction of asymptotic solutions of the elastic equation by complex integrals, Seminar Notes of Mathematical Sciences 11 (2008) 112-117 (査読なし)

[2] K. Tanuma and C. S. Man: Perturbation Formulas for Polarization Ratio and Phase Shift of Rayleigh Waves in Prestressed Anisotropic Media, J. Elasticity 92 (2008), 1-33 (査読あり)

[3] A. Morassi, G. Nakamura, K. Shiota, and M. Sini: Numerical method for an inverse dynamical problem for composite beams, Journal of Physics: Conference Series (Electrical journal) 73 (2007) (査読あり).

[その他]

研究代表者の研究に関するwebページ

<http://info.ibaraki.ac.jp/scripts/websearch/index.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

曾我 日出夫 (SOGA HIDEO)
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号 40125795

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

川下 美潮 (KAWASHITA MISHIO)
広島大学・理学研究科・准教授
研究者番号 80214633

千葉 康生 (CHIBA YASUO)
東京工科大学・コンピュータサイエンス
学部・講師
研究者番号 90400598

梅津 健一郎 (UMEZU KENNICHIRO)
茨城大学・教育学部・准教授
研究者番号 00295453

田沼 一実 (TANUMA KAZUMI)
群馬大学・工学部・准教授

研究者番号 60217156

野崎 英明 (NOZAKI HIDEAKI)
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号 60208337

代田 健二 (SHIROTA KENJI)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号 90302322