

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540168

研究課題名(和文) 関数方程式における差分的手法と正值性とその周辺の研究

研究課題名(英文) Research on difference methods, positive property and related problems of functional equations

研究代表者

内藤 敏機 (NAITO TOSHIKI)

電気通信大学・電気通信学部・教授

研究者番号：60004446

研究成果の概要(和文)：周期線形微分方程式の周期写像の反復写像で生成される線形差分方程式の解をスペクトル分解した。応用として周期線形微分方程式の解のリヤプーノフ指数を与えた。周期係数線形差分方程式の場合に拡大し、解のフロケ表現を得た。線形積分微分方程式の解が正值性を保つ条件を決定し、解のロバスト安定性と漸近安定性のついで条件を得た。周辺研究として差分方程式の周期解の存在、高階双曲型偏微分方程式の解の一意性、非線形解析的差分方程式について新しい結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Spectral decomposition of solutions of linear difference equations generated by iteration of periodic operator of periodic linear differential equations is obtained. As an application Lyapunov exponents of solutions of linear periodic solutions are given. By Extending the results to periodic linear difference equations, Floquet representations of solutions are obtained. Conditions of positive property of solutions of linear integro-differential equations are determined, and conditions about robust stability as well as asymptotic stability of solutions are obtained. As related topics, new results are obtained about periodic solutions of difference equations, uniqueness of solutions of higher order hyperbolic partial differential equations and nonlinear analytic difference equations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：関数方程式

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：差分方程式、関数微分方程式、積分微分方程式、周期解、正值解、漸近安定性、高階双曲型偏微分方程式、非線形解析的差分方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 差分的手法：無限の遅れを有する周期的な線形関数微分方程式の周期解の存在条件を確立することから出発している。周期解の存在について一般的方法は初期値に対して解にそって1周期後の値を対応させる周

期写像(あるいはポアンカレ写像)を考え、その不動点の存在問題に帰着させることである。線形の微分方程式においてはこの周期写像は線形アファイン写像となり、線形アファイン写像の不動点問題となる。有界解の存在を仮定して、周期解、概周期解を導き出す

既存の結果に対して、それでは有界解が存在する条件を具体的にどうなるかを改めて問い直して、解の固有空間成分を初期値の応じて具体的に書き表し、その結果できた式により初期の固有空間成分に応じて解の漸近挙動が一目でわかるような表現公式を得ることができていたので、その結果をさらに進展させようとしたのが当初の背景である。

(2) 正值性：初期値が正の条件をもつとき解も同じ性質をもつ条件である。微分方程式の制御問題において構造安定性（ロバスト安定）が取り上げられている。その場合一般の方程式で扱う場合と方程式の解が正值性を有する場合の研究があり、正成分をもつ正方行列の固有値に関するペロン・フロベニウスの定理の手法が取り上げられていた。正值性の性質をボルテラ方程式や一般の遅れをもつ方程式について調べることは案外既存の結果がなく、これからの問題として残っていた。

(3) 周辺の研究：高階双曲型偏微分方程式の解の一意性に関する Levi 条件を研究しようとしていた。また解析的な非線形差分方程式の係数行列の固有値が 1 である場合の解析解を構成しようとした。

2. 研究の目的

(1)

① 周期係数線形差分方程式の解の表現を得る研究及び解の漸近挙動を初期値によって完全に特徴付ける研究を行う。

② 次に得られた結果を用いて定数係数及び周期係数線形微分方程式に非線形摂動項を加えた方程式の漸近的性質を研究する。③ 我々の手法を用いて遅れを含む定数係数線形差分方程式の新しい解の表現及び解の漸近的挙動を調べる。さらに遅れを持つ線形微分方程式に応用する研究を行う。

(2)

① ボルテラ型微分積分方程式とそれに離散的な遅れの項が不可した微分方程式、さらに一般の無限遅れの微分方程式の正值条件を研究する。

② 正值条件を順序を保つ条件として無限次元空間の場合に拡張して研究する。

(3)

① 解の一意性に適した初期関数のクラスを決定し、その上で Levi 条件を構成する。

② 係数の固有値が 1 である場合の形式解を計算し、その解析性質を調べる。

3. 研究の方法

(1) ①、②、③非同次線形写像の反復による軌道の係数行列の固有空間成分を初期値に

より挙動がわかるようにする。係数行列が行列の指数関数の場合から一般の正則行列の場合に拡張し、二つの場合の結果を直接変換する関係を見出し、その結果をもとの常微分方程式の周期解や有界解の初期値条件問題に適用し、周期解、有界解を初期値で表す公式を確立する。

(2) ①、②ボルテラ差分方程式や積分微分方程式などの時間遅れをもつ方程式のうちで、非負な初期関数に対して常に非負な解を有するものを扱い、その解の安定性を研究する。特に、重み関数に関する安定性の概念を導入し、重み関数に関する安定性を解析する。

(3) ① 初期関数の空間としてジェブレイクラスを導入して研究する。②形式解の形式を確立して研究する。

4. 研究成果

(1)

①線形差分方程式の係数行列が行列の指数関数である場合と一般の正則行列である場合の、差分方程式の解の対応関係は第 1 種、第 2 種のスターリング数を用いて表現できた。その結果を周期線形微分方程式の解を周期写像の固有空間成分に分解することができた。この結果は解を解析する場合の基本的道具になるもので、今後広く使用されることが期待できる。

②前項の結果を用いて周期係数線形微分方程式の解のリュプーノフ指数を算出することができ、解の漸近安定性にかんする結果を得た。非自励線形微分方程式の解のリュプーノフ数の計算は難しく、今回得られた結果は周期系の場合であるが注目すべき結果である。他の関連研究として次のような結果を得た。

③遅れをもつ方程式の場合に応用する直接結果は得られなかったが、関連研究として、2次元自励線形微分方程式の不安定周期解を、差分的遅れの項で微分方程式を摂動し、安定化する問題について新知見をえた。その場合可換な行列の固有値問題を応用して、微分方程式の係数行列と可換な差分項摂動により、不安定周期解を安定化できることを示した。この方面の研究において従来の方法とは独立な結果を得た。遅れをもたない自励的差分方程式や有限の遅れをもつ自励的差分方程式の周期解の存在についてシャウダーの不動点定理を用いて論じて、非可付番無限個の周期解を含む周期解の存在を示すと共に、幾つかの例を与えた。遅れをもたない周期的差分方程式や有限の遅れをもつ周期的差分方程式の周期解の存在を、シャウダーの不動点定理、凸リアプノフ関数及びブラウダーの不動点定理を用いて示すと共に、得られ

た成果の有用性を示す幾つかの例を与えた。また、無限の遅れをもつ周期的差分方程式の周期解の存在問題が有限の遅れをもつ補助差分方程式の周期解の存在問題に帰着されることを示した。更に、遅れをもたない自励的差分方程式や有限の遅れをもつ自励的差分方程式の周期解の存在についてシャウダーの不動点定理を用いて論じて、非可付番無限個の周期解を含む周期解の存在を示すと共に、幾つかの例を与えた。

(2)

① 時間遅れをもつ方程式の典型例である関数微分方程式、積分微分方程式、ボルテラ差分方程式を中心に研究した。正值性に関する問題は、線形差分方程式の解半群の正值性に関する係数行列の条件を導出し、その条件を満たす場合のペロンフロベニウス型の定理を証明し、解の安定性、漸近安定性に関するスペクトル条件を得た。またロバスト安定性に関する摂動系の安定半径の公式を得た。また、正の線形ヴォルテラ差分方程式に対し、零解の一樣漸近安定性を立証が比較的容易なある条件によって特徴づけた。さらに、摂動方程式が安定性を保持するための摂動の大きさに対する公式を確立した。

さらに、積分微分方程式を中心に、方程式の正值性を調べ、正值方程式に対する安定条件をより明確な形で与えた。

② 無限次元空間内において、コンパクト作用素を係数にもつ線形ヴォルテラ差分方程式を考え、その正值性に対する特徴づけを確立した。また、バナッハ空間上の線形関数微分方程式に対して、解の漸近挙動を研究し、有限次元方程式に対するペロン型定理の拡張版を確立した。関数微分方程式に対する相空間における定数変化法の公式を利用して、摂動項をもつ関数微分方程式の解の漸近挙動を調べた。また、非線形関数微分方程式に対し、いくつかの不変多様体の存在定理を確立した。

(3)

① 時間変数係数の高階線形双曲型方程式に対する初期値問題の一意可解性に関して、係数が有限次退化、無限次退化を含むような荷重関数のクラスを導入した。特に有限次退化の場合の既存の結果をそのクラスに一般化した。主部の表象の特性根についての可解性条件を或る荷重関数によって与えて、時間変数係数の高階線形双曲型方程式に対する初期値問題の一意可解性に関する従来の結果の一部を拡張し、特に特性根が1点で無限次退化する場合をも扱えるような新たな証明法を考案した。

時空間変数の2階半線形双曲型方程式に対する初期境界値問題の解の振動性について、振動解と正值解になる条件をそれぞれ与えた。特に空間3次元では斉次ディリクレ条件下での球対称解と、空間1次元では斉次ノイマン条件下での解が各点振動するための条件を示した。

変数係数の線形常微分方程式系の解の漸近挙動に関して、非斉次方程式系の解に対する新規の評価式を導き、高次の特性数の概念を定義して、幾つかの新しい評価を得た。特に有界係数の非斉次方程式系の解が多項式位数になるための新たな条件を見出した。

② 非線形2階差分方程式の固有値2つが等しくなる場合と、2つが共に1となる場合の解析解の存在証明とその導出方法の構築を行った。非線形2連立差分システムの、線形項の係数行列の固有値が2つとも1でかつ非対角化行列の場合について、このシステムに関して、解析解の存在性を示し、その解の表示を得る事ができた。対角可能な場合は一つの解を得る事ができたのに対し、この場合は二つの解を得る事ができた。さらにこれらの理論を、これまで2つの固有値が異なる場合に限られていた人口モデルなどに応用し、その解を求めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計23件)

① T. Furumochi and T. Naito, Periodic solutions of difference equations, *Nonlinear Analysis*, 査読有 71(2009), 2217-2222.

② 宮崎倫子, 内藤敏機, 申正善, Delayed Feedback 方程式とその性質, *数理解析研究所講究録*, 査読無, 1637, 2009年4月, 74-86.

③ Pham Huu Anh Ngoc, T. Naito, Jong Son Shin and S. Murakami, Stability and robust stability of positive linear Volterra difference equations, *International J. of Robust and Nonlinear Controls*, 査読有 19(2009), 552-568.

④ S. Murakami, Stabilities with respect to a weight function in Volterra difference equations, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 査読有, 53, (2009), 189-197.

⑤ T. Furumochi and M. Muraoka, Periodic solutions of periodic difference equations, *Advanced Studies in Pure Math.*,

査読有, 53(2009), 63-69.

⑥ T. Furumochi, Periodic solutions of periodic difference equations by Schauder's theorem, *Cubo Math. J.*, 査読有, 11(2009), 55-63.

⑦ H. Ishida, Levi conditions to the Gevrey well-posedness for hyperbolic operators of higher order, *J. Math. Kyoto Univ.*, 査読有, 49(2009), 173-191.

⑧ H. Ishida, Y. Yuzawa, Oscillatory properties for semilinear degenerate hyperbolic equations of second order, *J. Math. Anal. Appl.*, 査読有, 356(2009), 624-532.

⑨ M. Suzuki, Analytic solutions of second order nonlinear difference equations all of whose eigenvalues are 1, *Rendiconti del Seminario Mathematics della Universita di Padova*, 査読有, 122(2009), 13-25.

⑩ M. Suzuki, An application model of a nonlinear difference equation whose the all eigenvalues are 1, *数理解析研究所講究録*, 査読無, 1637(2009), 57-65.

⑪ T. Naito, Pham Huu Anh Ngoc and Jong Son Shin, Representations and asymptotic behavior of solutions to periodic linear difference equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, 査読有, 51(2008), 55-80.

⑫ T. Naito, Pham Huu Anh Ngoc and Jong Son Shin, Lyapunov exponents of solutions to linear differential equations with periodic forcing functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 査読有, 342(2008), 349-353.

⑬ Pham Huu Anh Ngoc, T. Naito, Jong Son Shin and Satoru Murakami, On stability and robust stability of positive linear Volterra equations, 査読有, *SIAM J. Control Optim.*, 47(2008), 975-996.

⑭ T. Naito, Pham Huu Anh Ngoc and Jong Son Shin, Floquet representaions and asymptotic behavior of solutions to periodic linear difference equations, *Hiroshima Math. J.*, 査読有, 38(2008), 135-154.

⑮ M. Suzuki, Analytic general solutions of nonlinear difference equations, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 査読有,

187(2008), 353-368.

⑯ 内藤敏機, 申正善, Translation formulae and its applications, *数理解析研究所講究録*, 査読無, 1582, (2008), 108-117.

⑰ T. Naito, S. Murakami, Jong Son Shin and Pham Huu Anh Ngoc, Characterizations of positive linear Volterra Integro-differential systems, *Integr. equ. oper. Theory*, 査読有, 58(2007), 255-272.

⑱ Pham Huu Anh Ngoc, T. Naito and Jong Son Shin, On stability of a class of positive linear functional difference equations, *Math. Control Signals Syst.*, 査読有, 19(2007), 361-382.

⑲ Pham Huu Anh Ngoc, T. Naito and Jong Son Shin, Characterizations of positive linear functional differential equations, 査読有, *Funkcialaj Ekvacioj*, 50(2007), 1-17.

⑳ Pham Huu Anh Ngoc and T. Naito, Stability radius of linear parameter-varying systems and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 査読有り, 328(2007), 170-191.

㉑ 内藤敏機, 申正善, A representation of solutions for periodic linear differential equations, *数理解析研究所講究録*, 査読無, 1574, (2007), 59-67.

㉒ Pham Huu Anh Ngoc, Thai Bao Tran and T. Naito, Stability radii of higher order linear difference systems under multi-perturbations, 査読有, *J. Difference Equations and Applications*, 13(2007), 15-24.

㉓ Pham Huu Anh Ngoc, Nguyen Van Minh and T. Naito, Stability radii of positive linear functional differential systems in Banach spaces, *International J. Evolution Equations*, 査読有, 2(2007), 75-97.

〔学会発表〕(計14件)

① 石田晴久 退化双曲型方程式の振動問題について, 日本数学会2009年度秋季総合分科会, 2009年9月24日, 大阪大学理学部

② 宮崎倫子, 内藤敏機, 申正善, Commutative gain matrices in delayed feedback controls, 数理解析研究所、研究集会「現象解析と関数方程式の新展望」、2

009年、11月18日、京都大学

- ③ 内藤敏機、Delayed feedback 方程式について、「微分方程式研究集会」2009年8月8日、岩手大学教育学部
- ④ 村上悟 Uniform asymptotic stability for positive linear Volterra difference equations in Banach lattices, 「微分方程式の定性的理論ワークショップ」、2009年3月3日、大阪府立大学工学部
- ⑤ 宮崎倫子, 内藤敏機, 申正善, ある Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2008年12月20日, 京都大学.
- ⑥ 申正善, 内藤敏機, 宮崎倫子, Delayed Feedback 方程式とその性質, 数理解析研究所研究集会「関数方程式のダイナミクスと数理モデル」, 2008年11月5日, 京都大学
- ⑦ 鈴木麻美、固有値が1の非線形差分方程式の応用モデル、数理解析研究所研究集会「関数方程式のダイナミクスと数理モデル」、2008年11月4日、京都大学
- ⑧ 申正善, 内藤敏機, 宮崎倫子, 周期解の安定化について, 札幌医科大学における微分方程式セミナー, 2008年9月2日, 札幌医科大学
- ⑨ 申正善, 内藤敏機、ある線形微分方程式の解の大域的連続性、「微分方程式の定性的理論ワークショップ」、2008年3月2日、徳島大学総合科学部、
- ⑩ 内藤敏機、過去無限の遅れをもつ微分方程式に関する過去、研究集会「関数方程式の諸問題」、2008年3月7日、千葉大学けやき会館
- ⑪ 村上悟、Stabilities in positive linear Volterra integrodifferential equations in a Banach lattice, 京都大学数理解析研究所研究集会「関数方程式におけるモデリングと複素解析」、2007年11月5日、京都大学
- ⑫ 鈴木麻美、非線形2連立差分システムの解析解に関して、京都大学数理解析研究所研究集会「関数方程式におけるモデリングと複素解析」、2007年11月5日、京都大学
- ⑬ 申正善, 内藤敏機、変換公式とその応用、京都大学数理解析研究所研究集会「関数方程式におけるモデリングと複素解析」、200

7年11月6日、京都大学

⑭ Toshiki Naito, A representation of solutions of linear differential equations via the difference equations and spectral mapping theorem, Equadiff 2007, 2007年8月7日, Wien University of Technology.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内藤 敏機 (NAITO TOSHIKI)
電気通信大学・電気通信学部・教授
研究者番号：60004446

(2) 研究分担者

山口 耕平 (YAMAGUTI KOHEI)
電気通信大学・電気通信学部・教授
研究者番号：00175655

伊東 裕也 (ITO HIROYA)
電気通信大学・電気通信学部・准教授
研究者番号：30211056

石田 晴久 (ISHIDA HARUHISA)
電気通信大学・電気通信学部・准教授
研究者番号：80312792

古用 哲夫 (FURUMOCHI TETSUO)
島根大学・総合理工学部・教授
研究者番号：40039182

中嶋 文雄 (NAKAJIMA FUMIO)
岩手大学・教育学部・教授
研究者番号：20004484

村上 悟 (MURAKAMI SATORU)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号：40123963

鈴木 麻美 (SUZUKI MAMI)
桜美林大学・リベラルアーツ学群・准教授
研究者番号：10236010

(3) 連携研究者

宮崎倫子 (MIYAZAKI RINKO)
静岡大学工学部・准教授
研究者番号：40244660