

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540169

研究課題名 (和文) バナッハ環上の位相的な量を保存する写像の代数的性質の研究

研究課題名 (英文) Study on algebraic properties of maps between Banach algebras which preserve topological quantities

研究代表者

羽鳥 理 (Hatori Osamu)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：70156363

研究成果の概要 (和文)：関数環をはじめとする半単純可換バナッハ環やヒルベルト空間上の作用素からなるバナッハ環に関係した集合で乗法的にスペクトルを保存する写像や非対称に乗法的にスペクトル半径を保存する写像，またある種の距離を保存する写像の代数構造を研究し，それが線形であることや乗法的となる現象について研究を行った。このことによりバナッハ環の間の写像の保存問題についての新たな知見を得ることができた。

研究成果の概要 (英文)：We have studied maps between Banach algebras, such as uniform algebras, semisimple commutative Banach algebras, Banach algebras of operators on Hilbert spaces which are multiplicatively spectrum preserving or non-symmetrically and multiplicatively norm preserving. In particular, we have studied their algebraic structures such as linearity or multiplicativity. We found new results for preserver problems for maps between Banach algebras.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|---------|-----------|---------|-----------|
| 2007 年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 2008 年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2009 年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,200,000 | 960,000 | 4,160,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析，バナッハ環

1. 研究開始当初の背景

バナッハ環上の線形写像の乗法性の研究は 19 世紀さかのぼることができる。例えば Frobenius の定理を現代的な用語により述べると、「行列環上の全射かつ行列式を保存する写像は Jordan 射である。」となる。

Gleason-Kahane-Zelazko の定理によりバナッハ環から半単純可換バナッハ環への線形写像がスペクトルを保存すれば乗法的であることが示される。一方線形性を仮定しないような写像についての研究も 50 年以上前の Hua の研究など古くからある。また、

Gleason-Kahane-Zelazko の定理の驚くべき拡張である Kowalski-Slodkowski の定理もよく知られている。この定理からバナッハ環から半単純可換バナッハ環上の写像で加法的にスペクトルを保存する全射は線形かつ乗法的であることが導かれる。Kowalski-Slodkowski の定理以降、線形性を仮定しない保存写像の理論はこの 15 年ぐらいのあいだに急速に発展してきて Hochwald, Ransford, Dolinar, Petek-Semrl など多くの研究者によりさらに深い結果が得られつつある。特に、乗法的にスペクトルを保存する写像は Molnar により創始され、第 1 可算公理をみたすコンパクト空間上の複素数値連続関数全体からなる可換バナッハ環上の乗法的にスペクトルを保存する単位的全射写像は同形写像に限ることが示された。Rao-Roy はこれが任意の関数環からそれ自身への写像についても同様の結果が成り立つことを示し、本研究代表者と分担者の三浦と高木は任意の関数環から同じものとは限らない関数環の上へ乗法的に値域を保存する写像を対象として Molnar 型の結果をた。Luttman-Tonev はさらに peripheral spectrum を導入し、関数環から同じものとは限らない関数環への単位的全射写像で乗法的に peripheral spectrum を保存するものは同形写像に限ることを示した。一方で本研究代表者と分担者の三浦と高木により半単純可換バナッハ環上の乗法的にスペクトルを保存する全射写像が研究され、Molnar 型定理が証明された。Rao-Roy は単位元のない場合を扱いノルムに関して閉じた環（関数環の一般化）について乗法的にスペクトルを保存する写像を特徴付けた。しかしながら、乗法的にスペクトルを保存する全射写像については単位元をもたない半単純可換 Banach 環の場合は未解決であるし、また単位元をもつ場合においても乗法的に peripheral spectrum を保存する全射写像の研究もなされていないのが現状である。さらに乗法的にノルムを保存する写像の研究もまだ始まったばかりで多くの基本的な事柄すら未開拓のままである。特に非対称乗法的にノルムを保存写像に関する Hatori's conjecture (本研究代表者による予想) が Lambert-Luttman-Tonev により証明されたが、多くはこれからの研究により明らかにされていくであろうと考えている。なお、乗法的にスペクトルを保存する写像が全射でない場合には線形でも乗法的でもないことがあることを本研究代表者、分担者の三浦および高木 が示したので、乗法的にスペクトルを保存する写像の研究においては、写像が全射であることを仮定することは本質的である。本研究では上述のような問題を組織的に解決していくこと、またさらに新たな問題を提示していき、スペクトルやノルムを

はじめとする位相的な量を保存する写像の線形性、乗法性の研究を推進していきたい。

2. 研究の目的

(1) 単位元のない場合の研究。局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数で無限遠で消える関数全体の多元環 $C_0(X)$ の閉部分環で X の点を強分離するようなものを X 上の一般化関数環ということにする。 X 上の一般化関数環から Y 上の一般化関数環への全射写像で乗法的にスペクトルあるいは値域を保存する写像の研究を行う。関数環の場合には両者は多元環として同形であることが示されているが、単位元のない場合には本研究代表者により多元環としては同形とならないような例が与えられているのでこの研究を完成したい。さらに、一般に半単純可換バナッハ環の場合についても考慮する。

(2) 乗法的にノルムを保存する写像の研究。Luttman-Tonev により乗法的に peripheral spectrum を保存する写像の研究が始まったが、さらにその一般化として乗法的にノルムを保存する写像の研究が期待される。しかし簡単な例によりこのような写像が全射であっても線形でも乗法的でもないものの存在がわかる。一方 Hatori's conjecture が Lambert-Luttman-Tonev により証明され、非対称乗法的にノルムを保存する写像の研究が本格的に開始されたといつてよい。半単純可換バナッハ環から半単純可換バナッハ環への非対称乗法的にノルムを保存する全射写像の形を決定する研究では単位元のある場合について本研究代表者、分担者の三浦、高木 が写像の形を決定したのでその研究を完成させたい。

(3) 単位的バナッハ環の可逆元全体の群の構造とバナッハ環としての構造の研究。可逆元全体の群の同型性と多元環としての同型性の研究はあまりなされてはいない。一般にふたつの単位的バナッハ環において、可逆元全体の群同士が位相群として同形であってもバナッハ環は多元環として同形であるとは限らないことは Zelazko により知られているのが研究がなされていない原因のひとつであると考えられるが、本研究代表者は新しい現象を見出している。すなわち、群同形写像がスペクトルを保存する場合はその群同形写像は多元環としての同形写像に拡張されることが多くのバナッハ環に対して本研究代表者、分担者の三浦、高木により証明された。そこでこの研究の完成を目指したい。

3. 研究の方法

関数環から関数環への写像で乗法的に値域を保存する全射写像については本研究代表者、分担者の三浦、高木 によりその形が決定されている。これを一般化関数環の場合に

拡張することを考えた。X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし、 $C_0(X)$ を X 上の複素数値連続関数で無限遠で消えるもの全体からなるバナッハ環とする。 $C_0(X)$ の閉部分環で X の点を強分離するものを一般化関数環と呼ぶことにする。X が非コンパクトであれば、一般化関数環は定数関数を含まない。一般化関数環から一般化関数環の上への写像で乗法的に値域あるいはスペクトルを保存する写像の形を決定する方法を行う。関数環の場合はこのような2つの関数環は同形であることが示されているが、一般化関数環の場合はそれは期待できないと考え例を構成した。実際バナッハ環として同形でないような一般化関数環 A と B で、A から B の上への写像で乗法的に値域を保存するものが存在すると思われるのでこのような例を確定する。そのために候補者である一般化関数環の極大イデアル空間の様子を調べる。非対称乗法的にスペクトルあるいはノルムを保存する写像の研究を行った。そのため乗法的にノルムを保存する写像の構造を調べるのが要点であると考えたので、この点について調べた。単位元をもつバナッハ環に対してその可逆元全体からなる群を考える。ふたつのバナッハ環においてこのような群の同型性と多元環として同型性の関係について調べた。本研究代表者、分担者の三浦、高木により2つの単位的可換 C^* 環の可逆元全体の群について群同形写像でかつ一様ノルムを保つものが存在すると、その2つの可換 C^* 環はバナッハ環として同形であることが示されている。そのとき、Banach-Stone の定理が本質的な役割をはたす。この結果の関数環の場合についての考察を行った。すなわち、コンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環 A からコンパクト Hausdorff 空間 Y 上の関数環 B を考え、 T を $A^{\{-1\}}$ から $B^{\{-1\}}$ への群同形写像でさらに一様ノルムを保存するものとする。このとき A と B は実多元環として同形といえるか考察した。可換 C^* 環の場合と同様にして Choquet 境界間の同相写像の存在は示されるが、極大イデアル空間が同相であるかどうかは不明であるし、さらに極大イデアル空間が同相であるような同形ではない関数環は豊富にあるので Banach-Stone の定理は今の場合には適用できない点が問題を複雑にしているので、Banach-Stone の定理のある種の拡張を考えた。複素多元環としては同形でないようなものの存在は比較的簡単にわかる。上記と同様の問題は非可換なバナッハ環においても当然のことながら考察されるべき問題である。一方 Hochwald は行列環において可逆行列全体の群からそれ自身への同形写像で固有値を保存するものは行列環の同形写像に拡張できることを示しており、対象とするバナッハ環が無限次元の場合にも同様な結

果が成り立つことを予想している。本研究代表者、分担者の三浦、高木では単位的半単純可換バナッハ環の場合を扱った。

4. 研究成果

局所コンパクト Hausdorff 空間上の複素数値連続関数で無限遠点で消えるものからなる一様ノルムに関して閉じたバナッハ環を一般化関数環という。バナッハ環としては同形ではない2つの一般化関数環でその間に乗法的にスペクトルを保存する写像が存在するようなものを構成した。これは、単位元のある関数環では乗法的にスペクトルを保存する写像で結ばれる関数環はバナッハ環として同形であることと対比される結果で、単位元の有無がバナッハ環としての同型性に関しては異なった結果を導くことを示している点で興味深いといえる。このことから一般化関数環から一般化関数環への乗法的にスペクトルを保存する写像の形を決定すること、またそのような一般化関数環のあいだの関係は何か、に興味を持たれる。本研究により、一般化関数環から一般化関数環への乗法的にスペクトルを保存する写像はバナッハ空間としての同形写像を与えることが証明され、従ってこのような2つの一般化関数環はバナッハ環として同形といえるとは限らないが、バナッハ空間としては同形であることが分かった。つまり、乗法的にスペクトルを保存すると線形演算は保存されるが、一方では積が保存されるとは限らないという一見奇妙である結果が得られたことになる。関数環から関数環への写像や可換バナッハ環から可換バナッハ環への写像で乗法的にノルムを非対称に保存する写像の研究についてはさらに発展できると考えている。関数環から関数環への全射 T で単項式的に抹消スペクトルを保存するものの形を決定した。これは、乗法的に抹消スペクトルを保存する写像の結果の一般化である。対象の2変数単項式が m 乗 n 乗の形で m と n の最大公約数が1であれば、対象の写像は荷重合成作用素であることが分かった。また m と n の最大公約数 d が1より大きい場合は T の d 乗がある荷重合成作用素の d 乗であることを示した。この場合に T 自身が荷重合成作用素となるとは限らず、線形でも乗法的でもないような例を示した。また、実バナッハ関数空間に対する Stone-Weierstrass 型の定理を証明した。その際に対象のバナッハ関数空間の分離条件が大切で、既に知られている条件を緩めた条件のもとで作用関数がアファインのみであることを特徴付けた。また、商的にノルムを非対称に保存する写像についてもその形を決定することがで

きた。これは乗法的にノルムを非対称に保存する写像に関する結果を含むものでより一般的なものである。特に対合に対象性を仮定して述べられた半単純可換バナッハ環の間の写像の代数的性質に関する定理を、非可換のバナッハ環の場合も含めて対合の対象性の仮定なしに述べることの可能性を示した点で興味深いものである。また、単位的バナッハ環の可逆元からなる群の位相構造と代数構造の研究を行い、ある種のバナッハ環の可逆元からなる開部分群どおしが距離空間として同形であることと距離付け可能群として同形であることの同知性を示すことができた。この結果はつくばセミナーで発表され、また 2009 年に行われたアメリカ数学会のスペシャルセッションで講演を行った。単位的半単純可換バナッハ環の可逆元からなる群の開部分群から単位的バナッハ環の可逆元からなる群の開部分群への等距離写像 T が単位元を保存するとき、 T はそのバナッハ環の間の実多元環としての等距離同形写像に拡張できることを示し、従って対応する可逆元からなる群の間の等距離 (群) 同形写像であることが示された。Mazur-Ulam の定理を拡張した。その際に垂距離空間を導入し、強鏡映的垂距離空間や超鏡映的垂距離群の間の垂距離を保存する写像の代数構造を決定した。特にコンパクト空間 X 上の正值連続関数からなる群からコンパクト空間 Y 上の正值連続関数からなる群へのある種の垂距離を保存する写像の構造を決定した。これは単位的 C^* 環の可逆性要素全体の集合の間の Thompson 距離保存写像に関する Molnar の結果の可換版と見ることもできる。 A と B を単位的な半単純可換バナッハ環とし、 S と T を A から B への単位的な全射でスペクトル半径を非対称積的にうつす写像とする。このとき S と T は一致して、それらは A から B の上への実同形写像であることを示した。また関数環 A と B と A の適当な条件をみたす部分集合 I を考えて r と t をその集合から A への写像で、 S , T を I から B への写像として I の任意の関数 f, g について $S(f)T(g)$ の末梢スペクトルが $r(f)t(g)$ の末梢スペクトルに含まれるとき B の Choquet 境界から A の Choquet 境界への同相写像 ϕ が存在して $S(f)(y) = r(f)(\phi(y))$ と $T(f)(y) = t(f)(\phi(y))$ が I の任意の関数 f と B の Choquet 境界の任意の点 y について成立することを示した。この結果は乗法的に末梢スペクトルを保存する写像の代数構造に関する既存の結果の拡張になる。また極大イデアル空間の第 1Cech コホモロジー群がつぶれている可換 C^* 環では $r(f) = f$ の m 乗や $t(f) = f$ の n 乗は全射となるため、この場合には既存の結果を含むことが分かる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① Osamu Hatori, Kiyotaka Kobayashi, Takeshi Miura Sin-Ei Takahasi, Reflections and generalization of the Mazur-Ulam theorem, Rocky Mountain J. Math., 査読有, 掲載決定
- ② Osamu Hatori, Takeshi Miura, Rumi Shindo and Hiroyuki Takagi, Generalizations of spectrally multiplicative surjections between uniform algebras, Rendiconti. Del Circolo Mate. Palermo 査読有 掲載決定
- ③ Osamu Hatori and Kazuhiro Kasuga, Linear isometries of finite codimensions on Banach algebras of holomorphic functions, 査読有 Banach J. Math. Anal. 3(2009), no. 2, 109--124
- ④ Osamu Hatori, Isometries between groups of invertible elements in Banach algebras, 査読有 Studia Math., 194(2009) 293--304
- ⑤ Osamu Hatori, Takeshi Miura, Hirokazu Oka and Hiroyuki Takagi, Peripheral Multiplicativity of maps on uniformly Closed algebras of continuous functions Which vanish at infinity, 査読有 Tokyo J. Math., 32(2009), 91-104
- ⑥ Eggert Briem, Osamu Hatori and Stuart J. Sidney, A Stone-Weierstrass Theorem for Banach function spaces satisfying certain separation property, 査読有 J. Math. Anal. Appl. 353(2009), 607-613
- ⑦ Norio Niwa, Hirokazu Oka, Takeshi Miura and Sin-Ei Takahasi, Stability of almost multiplicative functionals 査読有 Aust. J. Math. Anal. Appl. 6(2009) Art. 12, 8pp
- ⑧ Takeshi Miura and Dai Honma, A generalization of peripherally m -multiplicative surjections between standard operator algebras. 査読有 Cent. Eur. J. Math. 7(2009) 479--486
- ⑨ Osamu Hatori, Kazumi Hino, Takeshi Miura and Hirokazu Oka, Peripherally monomial-preserving maps between uniform algebras, 査読有 Mediteerr. J. Math. 6(2009), 47--59
- ⑩ Takeshi Miura, Sin-Ei Takahasi and Norio Niwa, Ring homomorphisms on Commutative regular Banach algebras, 査読有 Nihonkai Math. J. 19(2008), 61-74
- ⑪ Osamu Hatori, Takeshi Miura and

Hirokazu Oka, An example of
Multiplicatively spectrum-preserving
Maps between non-isomorphic semi-simple
Commutative Banach algebras, 査読有
Nihonkai Math. J. 18(2007), 11--15

〔学会発表〕(計 15 件)

- ① 富永雅, 斎藤吉助, Dunkl-Williams不
等式と等号条件, 日本数学会年会, 2010年3
月25日, 慶応義塾大学矢上キャンパス
- ② 三谷健一, 小室直人, 斎藤吉助, absolut
ノルムの端点の von Neumann-Jordan 定数,
日本数学会年会, 2010年3月25日, 慶応義
塾大学矢上キャンパス
- ③ 三谷健一, 小室直人, 斎藤吉助, absolute
ノルムの端点の James 定数 日本数学会年会,
2010年3月25日, 慶応義塾大学矢上キャン
パス
- ④ Osamu Hatori, Isometries and symmetric
Transformations on groups, International
Conference on commutative Banach algebras
And their applications, 2010年3月21日
山形大学工学部
- ⑤ Keiji Izuchi, Ranks of invariant
subspaces of the Hardy space over the
bidisk, Joint Meeting of the KMS and the
AMS, 2009年12月17日, 梨花女子大, 韓国
- ⑥ 羽鳥 理, A Mazur-Ulam theorem, 2009
年度関数環研究集会, 日本大学薬学部, 2009
年11月26日
- ⑦ 羽鳥 理, 乗法的にスペクトルを保存す
る写像の構造定理とその拡張, 日本数学会秋
季総合分科会, 2009年9月24日, 東京工業
大学
- ⑧ Takshi Miura, Peripherally
multiplicInternational surjections
between uniform algebras, Special Session
on Banach Algebras, Topological Algebras,
and Abstract Harmonic Analysis, American
Mathematical Society 2009 Spring Western
Meeting, 2009年4月26日 San Francisco
State University
- ⑨ Osamu Hatori, Isometries between the
Groups of invertible elements in Banach
algebras, Special Session on Banach
Algebras, Topological Algebras, and
Abstract Harmonic Analysis, American
Mathematical Society 2009 Spring Western
Meeting, 2009年4月26日 San Francisco
State University
- ⑩ 羽鳥 理, 半単純可換Banach環の群は距
離構造から復元可能である, つくばセミナー,
2009年3月10日, 筑波大学
- ⑪ 三浦 毅, 関数環上のスペクトル保存写
像の拡張, つくばセミナー, 2009年3月10
日, 筑波大学
- ⑫ Takeshi Miura, A note on the stability

of Volterra type integral equation, The
Twelfth international Conference on
Functional Equations and Inequalities,
2009年9月8日, Bedlewo, Poland

- ⑬ 三浦 毅, ある種のスペクトルを保存す
る standard operator algebra 上の写像につ
いて, 第77回米沢数学セミナー, 2009年7
月1日, 山形大学工学部
- ⑭ 羽鳥 理, 三浦 毅, 高木 啓行, 関
数環上のある種の値域保存写像, 日本数学
会秋季総合分科会, 2007年9月21日, 東
北大学
- ⑮ 三浦 毅, 関数環上のある種の値域保存
写像, 日本数学会秋季総合分科会, 2007年9
月21日, 東北大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

羽鳥 理 (Hatori Osamu)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号: 70156363

(2) 研究分担者

三浦 毅 (Miura Takeshi)
山形大学・理工学研究科・准教授
研究者番号: 90333989
高橋 眞映 (Takahashi Sin-Ei)
山形大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 50007762
泉池 敬司 (Izuchi Keiji)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号: 80120963
斎藤 吉助 (Saito Kichisuke)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号: 30018949
渡邊 恵一 (Watanabe Keiichi)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号: 50210894

