**様式 C-19**

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　６月　７日現在

**機関番号：13901**
**研究種目：基盤研究（C）**
**研究期間：2007～2010**
**課題番号：19540170**
**研究課題名（和文）**
**粘性流体の中の物体の運動の数学解析**
**研究課題名（英文）**
**Mathematical analysis of motions of bodies in a viscous fluid**

**研究代表者：**
**菱田　俊明 (HISHIDA TOSHIAKI)**
**名古屋大学・多元数理科学研究科・教授**
**研究者番号：60257243**

研究成果の概要（和文）：無限にひろがる非圧縮粘性流体の中に剛体の障害物がある。物体の運動と流体の運動の相互作用の解析を目指して、物体が回転運動するときに、その外部領域での Navier-Stokes 流を考察する。本研究では、まず空間３次元の場合に定常解の存在と安定性を示し、定常解のまわりでの時間大域解の漸近挙動を求めた。また、時間周期解についても、同様なことを調べた。次に、定常解の空間無限遠での減衰構造と異方的な漸近形を求めた。さらに、空間２次元の場合の定常解の減衰構造も求めて、ストークスの逆理が物体の回転により解消されることを示した。

研究成果の概要（英文）：Suppose that there is an obstacle, which is a rigid body, in a viscous incompressible fluid. Toward analysis of body-fluid interaction, let us consider the Navier-Stokes flow in the exterior of the body when it is rotating with constant angular velocity. We first proved the existence and stability of the steady flow in 3D and derived the large time behavior of a unique global solution around that steady flow. The similar results were obtained for the time-periodic flow as well. We next deduced the decay structure and asymptotic profile of the steady flow at space infinity. The decay structure of the steady flow in 2D was also provided, so that we found the resolution of the Stokes paradox by the rotation of the body.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2007 年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2008 年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| 2009 年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 2010 年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| 総　計 | 3,300,000 | 990,000 | 4,290,000 |

研究分野：函数方程式論
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：非圧縮粘性流体、Navier-Stokes 方程式、Stokes 方程式、外部領域、漸近挙動

## １．研究開始当初の背景

３次元空間にひろがる非圧縮粘性流体の中に剛体の障害物がある。物体の運動に応じて、それが流体の運動にどのように関わるのかを知ることは、数学の枠を超えて興味深い問題である。剛体の運動は並進と回転に分解される。物体が並進運動する場合は有名な問題であり、物体後方に航跡が生じることは流体物理学において周知であるし、このような異方的な減衰構造の数学による証明も 1960 年代に Finn によって与えられた。一方、物体が回転運動する場合には、流体物理学においても特段の知見は得られていない。また、数学においても 1990 年代に Borchers　と本

研究の研究代表者によって開始されたところであり、その後 21 世紀に入って相当進展はしたが、まだ完全な理解には程遠い状況であった。実際、回転座標系により一定な外部領域での問題に書き直すとき、剛体の回転角速度ベクトルを係数とする移流項が現れるが、その係数の非有界性より、この移流項を粘性項からの摂動として扱うことができない。この点が当問題の最大の特徴であると言え、従来の解析方法が働かない要因であった。また、回転軸という特別な方向があるので、解の減衰構造は異方性を有するべきであるが、そのような知見はまったく得られていなかった。回転の困難を克服する数学、回転の効果を捉える数学の構築が研究の動機であり、これらが物体と流体の相互作用の解析の基礎となる。

２．研究の目的

上記の研究背景を踏まえて、物体の運動と流体の運動の相互作用を理解することを最終的な目的とする。流体の運動はその基礎方程式である Navier-Stokes 方程式により記述され、一方で剛体の運動は並進と回転に分解されて、それらは運動量保存則と角運動量保存則から導かれる微分方程式により記述され、双方がカップルしている。この連成系の一意な時間局所解、大域解の存在を示し、その長時間挙動の詳細、および空間無限遠での異方的な減衰構造を明らかにする。そのためにまず、物体の運動が指定されている場合、特に一定な回転角速度で回転する場合の解析を行い、物体の運動の効果が流れの漸近挙動に引き起こす種々の影響についての詳しい知見を得ることを目指す。

３．研究の方法

まず、線型の定常問題に対しての実解析の手法によるルベーグ空間での評価、および補間理論も援用したローレンツ空間での評価が、非線型問題の定常解の構成において重要である。また、その安定性と撹乱の時間についての漸近挙動を示すには、線型部分が生成する作用素半群を用いる。この半群は解析半群でなく、このことが当問題の難しさでもあり面白さでもあるが、放物型方程式の初期値問題の解に対して典型的な時間に関する最良減衰を導出することを目指して、対応するレゾルベント問題のスペクトル解析を行う。また、時間周期解の構成と安定性の解析においても、上記の半群を用いる。一方、定常解の空間無限遠での漸近形を求める方法は、基本解の減衰構造の詳細な解析による。また、通常の Navier-Stokes 方程式の自己相似解の集合の構造も重要な役割を果たす。

当科学研究費補助金の使用の観点では、研究計画を遂行するために最も肝要なことは、当分野の優れた研究者との活発な交流である。Navier-Stokes 方程式に従事する優れた研究者が所属する大学へ研究出張して有益な討論をし、また国際研究集会において研究成果の発表を行う。当分野をリードする世界中の研究者と討論することで、本研究の格段の進展が見込まれる。

４．研究成果

(1)一定な角速度で回転する物体のまわりでの Navier-Stokes 方程式を物体に固定した座標系を用いて一定な外部領域での問題に書き直す。この問題の一意な定常解を回転角速度と外力が小さいときに構成した。解はローレンツ空間の系列である弱 L3 空間に属し、先行する Galdi の結果と比べて、外力のクラスが広い。また、この解のクラスは、Leray のクラスの異なり、その安定性を期待してよいクラスである。証明の主要なステップは、線型定常問題の解のローレンツ空間での評価の導出である。解の評価は、まず全空間の問題に対して行い、次に外部問題へすすむ。外部問題においては、流体から障害物の境界にかかる力があるために、解の存在、一意性、評価がすべて成り立つための空間の指数について本質的な制限が生じることに注意する。実解析の手法によるルベーグ空間での解の評価と補間理論を用いて外部問題の解のパラメトリクスを作る際に、そのような制限が明らかとなる。

(2)上で構成した定常解の安定性を証明した。ただし、定常解および初期撹乱は弱 L3 空間において小さいとする。先行する Galdi および Silvestre の結果と比べて、撹乱の長時間挙動について最良な減衰度が得られている。証明の主要なステップは、線型の初期値問題の解、すなわち線型部分の生成する半群の長時間挙動の導出である。解析半群ではない半群に対して、本研究のような長時間挙動が得られた例はこれまでになかったと思われ、その点でも意義深い。はじめに、全空間でのレゾルベント問題のスペクトル解析を行った。虚軸の遠方にも生成作用素のスペクトルの端点があるので、各端点での特異性の強さを評価しなくてはならない。次に、外部領域でのレゾルベント問題の解のパラメトリクスを構成して、全空間でのレゾルベントの性質が遺伝することを示し、さらにこれを用いて、半群の局所エネルギー減衰を導出した。

(3)上で求めた半群の長時間挙動を用いて、同じ問題の小さな時間周期解の存在を示した。この解の空間変数についてのクラスは、弱 L3 空間であり、特別な場合として(1)で述べた定常解の存在定理を含んでいるとみなすことができる。証明はある積分方程式を解

くことにより行われる。さらに、(2)で述べた定常解の安定性と同様な意味での時間周期解の安定性も証明した。

(4)線型定常問題の弱 L3 空間に属する解の減衰構造を求めた。より詳しくは、空間無限遠で解の漸近展開を行い、その第１項と第２項を求めることによって、解の異方的な漸近形を明らかにした。第１項の形は通常のストークス基本解と回転軸の単位方向ベクトルの積で与えられ、その係数は流体から障害物の境界にかかる力の回転軸方向の成分である。これによって、流れが回転軸方向に集中する様相を観察でき、解の減衰構造において回転軸の果たす重要な役割が明瞭となった。また、物体が静止の場合の通常のストークス流の第１項の係数は流体から障害物の境界にかかる力の全成分であるので、回転軸方向の成分だけが寄与するという本研究の結果は、物体が静止のときとの対照を明示している点で意義深い。さらに、漸近展開の第２項は、回転する流れの形を含み、物体の回転の影響の直接的な伝播である。漸近展開を証明するには、まず基本解の減衰構造の詳細な解析を行い、定常解の基本解によるポテンシャル表現を用いる。方程式は変数係数であるので、基本解は２変数関数であることに注意する。また、それは非定常問題の基本解の時間変数についての積分という形でしか表現されない。基本解の解析の要点は、回転効果により振動して空間無限遠で速く減衰する部分とそうではない部分の精確な切り分けである。

(5)線型定常問題に対する上記の知見を頼りに、回転する物体の外部領域での非線型定常 Navier-Stokes 流の空間無限遠での減衰構造を明らかにした。ただし、その解は弱 L3 空間で小さいとする。その第１項は、３次元全空間での通常の Navier-Stokes 方程式の自己相似解のひとつであり、明示的な表示をもつものである。その表示はランダウにより初めて与えられた。まず、弱 L3 空間の減衰度は線型部分と非線型部分の釣り合いを導くため、漸近形が非線型効果を含み、上記のように自己相似解となることは妥当である。実は、すべての自己相似解からなる族は３次元ベクトルによりパラメトライズされ、そのパラメータを方向ベクトルとする軸に関して自己相似解は対称である。このことは近年の Sverak の論文で示された。上記の漸近展開の第１項を与える自己相似解は、物体の回転軸に関して対称であり、このことを見抜く際に(4)の線型定常流の減衰構造についての知見が生かされた。すなわち、線型においても非線型においても、回転軸は流れの漸近挙動に決定的な役割を果たしている。このようなことは、流体物理学においても、きちんと説明されていなかったと思われる。

(6)以上の成果は空間３次元の問題に対してであったが、次に２次元平面での外部定常問題を考える。障害物が静止しているとき、２次元問題は３次元に比べて格段に難しいことがよく知られている。その主たる理由は、線型定常問題に対するストークスの逆理にある。すなわち、同次ストークス方程式の同次 Dirichlet 境界条件のもとでの解は、空間無限遠で非有界であり、したがっていかなる一様流も取ることができない。そのため、非線型の Navier-Stokes 方程式はもはや線型のストークス方程式からの摂動と見ることはできず、Leray のクラスの空間無限遠での漸近挙動についての最終的な解答は与えられていない。もし物体が一定な速度で並進すれば、上記のストークスの逆理が解消されることは周知である。本研究では、物体が一定な角速度で回転する場合であっても、ストークスの逆理が解消されることを示した。これは、線型定常問題の解の減衰度が、物体静止の場合と比べて、真に良くなるためである。３次元の場合には、減衰構造は異なるけれども、減衰度自体が速くなるわけではないから、上記のことは２次元と３次元の顕著な違いを述べている。また、解の空間無限遠での漸近展開の第１項においては、物体の回転の影響により、流れも回転する様相を見出すことができる。すなわち、(4)で述べた３次元の漸近展開の第２項に相当するものが２次元では第１項に現れるのである。証明はやはり基本解の詳細な解析による。2 次元では、基本解の表現を正当化するだけでも３次元に比べて手間がかかるが、このことは障害物が回転していない場合であっても同様である。当初の研究計画は空間３次元の問題に対するものであったが、一連の研究成果が２次元外部問題に対して新規な研究方向を開くという予期していなかった展開を生んだ。物体が並進の場合の結果と併せると、物体が運動すればストークスの逆理が解消されることを示唆しており、平面流の新しい理論の構築の基礎となりうるものである。

(7)最後の成果は、一般な非有界領域でのストークス半群の空間１階微分が時間無限大で最良減衰するルベーグ空間の指数の範囲と同じ領域での定常ストークス流の空間無限遠での減衰度との関係を明らかにしたものである。このような視点は、従来にはなかったと思われる。この結果の系として、外部領域でのストークス半群についての Iwashita の結果は最良であることが示される。また、別なる系として、外部領域で物体が回転する場合に、上記の(4)で明らかとなった定常流の漸近展開により、(2)の半群に

対する結果も最良である。一方、外部領域で物体が並進する場合のオセン半群に対する Kobayashi-Shibata の結果については、最良であるとは言えないことを示唆している。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）
① Reinhard Farwig, Toshiaki Hishida, Leading term at infinity of steady Navier-Stokes flow around a rotating obstacle, Math. Nachr., 掲載決定, 査読有り.
② Reinhard Farwig, Toshiaki Hishida, Asymptotic profile of steady Stokes flow around a rotating obstacle, Manuscripta Math., 掲載決定, 査読有り.
③ Toshiaki Hishida, On the relation between the large time behavior of the Stokes semigroup and the decay of steady Stokes flow at infinity, Parabolic Problems: The Herbert Amann Festschrift, Progress in Nonlinear Diff. Eq. and Their Appl., 60 (2011), 343-355, 査読有り.
④ Reinhard Farwig, Toshiaki Hishida, Asymptotic profiles of steady Stokes and Navier-Stokes flows around a rotating obstacle, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat., 55 (2009), 263-277, 査読有り.
⑤ Toshiaki Hishida, The Navier-Stokes flow around a rotating obstacle with time-dependent body force, Banach Center Publ., 86 (2009), 149-162, 査読有り.
⑥ Toshiaki Hishida, Yoshihiro Shibata, Lp-Lq estimate of the Stokes operator and Navier-Stokes flows in the exterior of a rotating obstacle, Arch. Rational Mech. Anal., 193 (2009), 339-421, 査読有り.
⑦ 菱田俊明, 回転する障害物の周りでの非圧縮粘性流体の方程式の数学解析, 数学, 60 (2008), 68-94, 査読有り.
⑧ Reinhard Farwig, Toshiaki Hishida, Stationary Navier-Stokes flow around a rotating obstacle, Funkcial. Ekvac., 50 (2007), 371-403, 査読有り.
⑨ Toshiaki Hishida, Steady motions of the Navier-Stokes fluid around a rotating body, Adv. Studies Pure Math., 47-1 (2007), 117-136, 査読有り.
⑩ Toshiaki Hishida, Yoshihiro Shibata, Decay estimates of the Stokes flow around a rotating obstacle, RIMS Kokyuroku Bessatsu B1 (2007), 167-186, 査読有り.

〔学会発表〕（計 16 件）
① 菱田俊明, 2D flow around a rotating obstacle, International Conference on Evolution Equations, 2010 年 10 月 11 日, Schmitten (Germany).
② 菱田俊明, 2D flow around a rotating body, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010 年 5 月 27 日, TU Dresden (Germany).
③ 菱田俊明, Leading profile of the steady Navier-Stokes flow around a rotating body, Mathematical Fluid Dynamics Launching Workshop, 2009 年 4 月 16 日, 早稲田大学.
④ 菱田俊明, 回転する物体の周りでの Navier-Stokes 流の漸近形, 日本数学会春季年会, 2009 年 3 月 29 日, 東京大学.
⑤ 菱田俊明, Asymptotic profile of the steady Stokes flow around a rotating obstacle, 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 27 日, 東京工業大学.
⑥ 菱田俊明, Asymptotic profile of the steady and unsteady Stokes flows around a rotating obstacle, Conference on Parabolic and Navier-Stokes Equations, 2008 年 9 月 4 日, Banach Center, Bedlewo (Poland).
⑦ 菱田俊明, 回転する障害物の周りでの非圧縮粘性流体の方程式の数学解析, 日本数学会春季年会(特別講演), 2008 年 3 月 25 日, 近畿大学.
⑧ 菱田俊明, On the relation between the large time behavior of the Stokes semigroup and the decay of the steady Stokes flow at infinity, 日本数学会秋季総合分科会, 2007年9月23日, 東北大学.

〔図書〕（計 1 件）
① 菱田俊明 (小薗, 小川, 三沢編集), 日本評論社, これからの非線型偏微分方程式 (第 6 章), 2007, 133-150 (分担執筆).

６．研究組織
(1)研究代表者
菱田　俊明 (HISHIDA TOSHIAKI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：60257243

(2)研究分担者　なし
(3)連携研究者　なし