様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月１４日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007～2008
課題番号：19540172
研究課題名（和文）　直交関数展開に関する調和解析の研究

研究課題名（英文）　A study of harmonic analysis in orthogonal expansions

研究代表者
勘甚　裕一（KANJIN YUICHI）
金沢大学・機械工学系・教授
研究者番号：50091674

研究成果の概要：古典的なハーディの不等式を，エルミート展開とラゲール展開に対して考察し類似の不等式を得ることに成功した．特筆すべき点は，得られた不等式が，古典的な場合とは異なり，可積分関数の空間で成り立つことである．もう１つの成果は，積分変換に関するペーリーの不等式を得たことである．これは，特殊な場合としてフーリエ変換を含む有用な積分変換であるハンケル変換に対して，古典的なペーリーの不等式が成り立つことを示したものである．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,800,000	540,000	2,340,000
２００８年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：実解析
科研費の分科・細目：数学・基礎解析
キーワード：ハーディの不等式，ペーリーの不等式，実ハーディ空間，ラゲール展開，エルミート展開，ハンケル変換

１．研究開始当初の背景

単位円盤上のハーディ空間において成り立つ，よく知られた，ハーディの不等式をエルミート多項式展開とラゲール多項式展開に対して示した：Y. Kanjin, Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions,Bull. London Math. Soc. 29(1997), 331-337 が本研究の契機である．この結果は，R. Radha (2000), R. Radha－S. Thangavelu (2004), R. Balasubramanian and R. Radha (2005)等による多次元エルミート多項式展開におけるハーディの不等式の研究を引き起こした．

研究代表者勘甚は，Radha-Thangavelu の結果の考察から，このハーディの不等式が大きく改良出来るものと推測した．これが，本研究を開始する直接の動機の一つであった．

また，ハーディ空間において成り立つもう一つの著名な不等式であるペーリーの不等式を，直交関数展開に対して示すことが，本研究代表者や佐藤邦夫によってヤコビ多項

式展開とフーリエーベッセル級数展開に関して行われ，成果が得られていた.

一方，積分変換のような連続変換については，フーリエ変換においてすら，ペーリー型の不等式は知られていなかった．そこで，フーリエ変換を含む有用な積分変換であるハンケル変換について，ペーリー型の不等式を考察することが興味深い問題と考えられた．これが本研究のもう１つの動機となった.

２．研究の目的

研究目的の１つは，エルミート展開とラゲール展開に関するハーディの不等式である．これは，古典的なハーディの不等式を，エルミート展開とラゲール展開に対して考察するものである.

古典的なハーディの不等式とは，実ハーディ空間に属する関数のフーリエ級数展開を考えたとき，第n番目のフーリエ係数の絶対値を|n|+1で除したものを，すべてのnに渡って総和したものが収束し，その和は元の関数の実ハーディ空間のノルムで押さえられるというものである.

研究当初の背景でも述べたように，本研究代表者は，Y. Kanjin, Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions,Bull. London Math. Soc. 29(1997), 331-337において，上で述べた古典的なハーディの不等式をエルミート展開とラゲール展開において考察した.

エルミート展開については，実直線上の実ハーディにおいて古典的な場合と同様の不等式を得た．ただし，古典的な場合との違いはエルミート係数の絶対値を(n+1)で除すのではなく，(n+1)の29/36乗で除すという形で得られた.

ラゲール展開については，半直線上の実ハーディ空間において，古典的な場合と同様にラゲール係数を(n+1)で除した形で，ハーディ型の不等式が得られた.

これらの結果がR. Radha やS. Thangavelu, R. Balasubramanian等の多次元のエルミート展開におけるハーディの不等式の研究を触発した．彼等の結果を考察すると，前述の指数29/36は3/4に近い値まで改良できることが予想される.

本研究目的の１つは，エルミート展開におけるハーディの不等式の(n+1)に現れる指数を3/4にイプシロン（いくらでも小さい正の数）だけ加えたものに改良することである．関連して，すでに得ているラゲール展開に関するハーディの不等式が，最良なものであるか否かを再考察する.

もう１つの研究目的は，古典的な実ハーディ空間におけるペーリーの不等式をハンケル変換に関して定式化し，それを証明することである.

古典的なペーリーの不等式とは，実ハーディ空間に属する関数のフーリエ級数展開を考えたとき，第n番目のフーリエ係数の絶対値の２乗をアダマール間隙を持つnに渡って総和したものは収束し，その和は元の関数の実ハーディ空間のノルムの２乗で押さえられるというものである.

研究当初の背景で述べたことと重複するが，直交関数展開に対してペーリー型の不等式を示すことが，本研究代表者や佐藤邦夫，によってヤコビ多項式展開とフーリエーベッセル級数展開に関して行われ，成果が得られていた．しかし，特殊な場合としてフーリエ変換を含む積分変換であるハンケル変換に対しては，その定式化すら知られていない.

本研究のもう１の研究目的を具体的に述べれば，半直線上の実ハーディ空間に属する関数の指数μのハンケル変換を考える．そのハンケル変換は，また半直線を定義域としている．このハンケル変換の定義域である半直線に，共通部分を持たないような部分区間I_n, n=1,2,3,...を考える．これらの部分区間の間隔がアダマール間隙を持つとする．このとき，ハンケル変換の，この部分区間上における絶対２乗積分の総和が，元の関数の実ハーディ空間のノルムの２乗で押さえられることを証明するのが目的である.

３．研究の方法

ハーディの不等式に関しては，これまでの結果を得るために使った道具はアトム分解であった．これを簡単な(L^1,L^∞)-duality におきかえて証明を試みるのが，単純ではあるが，研究方法のアイデアである.

一方，予想としてα=0 のラゲール展開の場合には異なる手法が必要と考えられる．これには，本研究代表者と佐藤圓治がラゲール展開に関する端数積分の定理を得たとき用いた移植作用素が有効な方法を提供すると考えられるので，この方法を用いる.

ペーリーの不等式については，これまでのヤコビ展開などの研究経験から，ハンケル変換についても(H^1,BMO)-dualityを用いるのが，有効な研究方法であると考えられる.

４．研究成果

得られた成果は次のとおりである.

（１）ハーディの不等式について
①エルミート展開に関して次が成り立つ．可積分関数の作る関数空間に属する関数のエルミート係数の絶対値を(n+1)の $3/4+\varepsilon$ 乗したもので割った項を n=0,1,2,…に渡って総和したものは，収束しその和は元の関数の可積分関数のノルムで押さえられる．ただし，ε は任意の正の定数である．
さらに，この結果は次の意味で最良である．$\varepsilon=0$ の場合には，上で言う総和が発散するような，可積分関数が存在する．
この結果において注目すべき点は，実ハーディ空間より広い空間である可積分関数の空間でハーディの不等式が成り立つ点である．これは，エルミート展開がフーリエ級数展開とは本質的に異なるものであることを示す興味深い結果であるとも言える．
②ラゲール展開に関して次が成り立つ．ラゲール展開の指数 α が正の場合と，$\alpha=0$ の場合では様相が異なる．α が正の場合は次の通りである．可積分関数の空間に属する関数を考える．その関数における，ラゲール展開の係数の絶対値を(n+1)で除した項を n について総和したものは，収束しその和は元の関数の可積分関数のノルムで押さえられる．
この結果は，次の意味で最良である．どんな $0<a<0$ を取っても，(n+1)を $(n+1)^a$ で置き換えると上で言う総和が発散するような可積分関数が存在する．
$\alpha=0$ の場合は次のようになる．半直線上の実ハーディ空間に属する関数のラゲール係数の絶対値を(n+1)で割った項を n=0,1,2,..に渡って総和したものは収束し，その和は元の関数の実ハーディ空間のノルムで押さえられる．
この結果は，次の意味で最良である．実ハーディ空間を可積分空間で置き換えることは出来ない．つまり，上の総和が発散するような可積分関数が存在する．
このように，ラゲール展開もエルミート展開同様に，フーリエ級数展開とは違った挙動を示すことを明らかにする事実を得ることが出来た．
以上，ハーディの不等式については，当初の予想を超える，興味深い知見を得ることが出来た．
（２）ペーリーの不等式について
次の結果を証明することが出来た．半直線上の実ハーディ空間に属する関数の指数 μ のハンケル変換を考える．このハンケル変換の定義域である半直線に，共通部分を持たないような部分区間 I_n, n=1,2,3,...を考える．ただし，各部分区間の長さは，任意であるが一定であるものとする．これらの部分区間の間隔がアダマール間隙を持つとする．このとき，ハンケル変換の，この部分区間上における絶対２乗積分の総和は，元の関数の実ハーディ空間のノルムの２乗で押さえられる．
この結果は次の意味で最良である．実ハーディ空間を可積分関数の空間で置き換えることは出来ない．すなわち，上で言う総和が発散するような可積分関数が存在する．

今後の展望については次の通りである．ハーディの不等式につてであるが，証明にはこれまでアトム分解を使ってきた．一方，上述（１）②の $\alpha=0$ の場合には移植作用素を使う方法を用いた．この移植作用素を用いる方法は有力であると考える．研究代表者はハンケル変換のハーディの不等式をすでに証明しているが，このとき使ったのはアトム分解であった．これをハンケル変換の移植定理を使ったものに改良することが，今後の具体的な目標である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１３件）

①Yuichi Kanjin and Kunio Sato, Paley's inequality of integral transform type, Hokkaido Math. J. (印刷中). 査読有

②Dashan Fan and Shuichi Sato, A note on singular integrals associated with a variable surface of revolution, Math. Inequal. Appl. (印刷中). 査読有

③Shuichi Sato, Estimates for singular integrals and extrapolation, Studia Math. (印刷中). 査読有

④Shuichi Sato, Estimates for singular integrals along surfaces of revolution, J. Aust. Math. Soc. (印刷中). 査読有

⑤Kazuya Thoge, On Gundersen's solution of the Fermat-type functional equation of degree 6, Complex Variables and Elliptic equations, (印刷中). 査読有

⑥Elijah Liflyand and Akihiko Miyachi, Boundedness of the Hausdorff operators in Hp spaces, 0<p<1, Studia Math. (印刷中). 査読有

⑦Akihiko Miyachi, Fabio Nicola, Silvia Rivetti, Anita Tabacco and Naohito Tomita, Estimates for unimodular Fourier multipliers on modulation spaces, Proc. Amer. Math. Soc. (印刷中). 査読有

⑧Akihiko Miyachi, Change of variables for weighted Hardy spaces on a domain, Hokkaido Math. (印刷中). 査読有

⑨Masaharu Kobayashi, Akihiko Miyachi and Naohiko Tomita, Embedding relations between local Hardy and modulation spaces, Studia Math. (印刷中). 査読有

⑩Shuichi Sato, Estimates for Littlewood-Paley functions and extrapolation, Integr. Equ. Oper. Theory 62(2008), 429-440. 査読有.

⑪ Kazuya Thoge, Remarks on a special fundamental solution base and its product, Complex Analysis and its Applications, Proceedings of the 15th ICFIDCAA, Osaka 2007, OCAMI Studies, 2(2008), 351-356. 査読有

⑫ Lin Weichuan and Kazuya Thoge, On shared-value properties of Painleve transcendenta, Comput.Methods Funct. Theory, 7(2007), 477-499. 査読有

⑬Qui Han and Kazuya Thoge, On results of H. Ueda and G. Brosch concerning the unicity of meromorphic functions, J. Math. Anal. Appl. 335(2007), 915-934. 査読有

〔学会発表〕(計 7件)

①勘甚裕一, 直交関数展開における移植定理―その意味と応用―, 日本数学会秋季総合分化会企画特別講演, 2008年9月27日, 東京工業大学大岡山キャンパス

②藤解和也, 値分布論入門, 第４３回函数論サマーセミナー, 2008年8月24日, マホロバマインズ三浦 (神奈川県三浦市)

③Shuichi Sato, On certain estimates of singular integrals useful for extrapolation, ＲＩＭＳ研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」,2008年7月8日, 京都大学数理解析研究所

④藤解和也, Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages, 函数論と値分布論」小澤満先生七年忌追悼研究集会, 2008年2月9日, 東京工業大学

⑤Yuichi Kanjin, Paley's inequality of integral transform type,Harmonic Analysis and Orthogonal Systems, 2007年11月23日, La Cristalera(The residence of the Universidad Autonoma de Madrid), Miraflores de La Sierra, Madrid, Spain

⑥勘甚裕一, 移植作用素とチェザロ作用素, 第 46 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 2007年8月8日, 九州大学西新プラザ

⑦ Kazuya Thoge, A special fundamental solution base and its product, The 15th international Coference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2007年8月2日, Osaka City University

６．研究組織

(1)研究代表者

勘甚　裕一 (KANJIN YUICHI)
金沢大学・機械工学系・教授
研究者番号：50091674

(2)研究分担者

佐藤　秀一 (SATO SHUICHI)
金沢大学・学校教育系・准教授
研究者番号：20162430

藤解　和也 (TOHGE KAZUYA)
金沢大学・電子情報系・准教授
研究者番号：30260558

(3)連携研究者

新井　仁之 (ARAI HITOSI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：10175953

宮地　晶彦 (MIYACHI AKIHIKO)
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号：60107696