

平成 22 年 5 月 1 日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540173
 研究課題名（和文）諸分野に現れる微分・差分方程式と有理型函数・正則曲線の値分布に関する研究
 研究課題名（英文）Research of differential or difference equations appearing in many fields and the value distribution of meromorphic functions or holomorphic curves
 研究代表者
 藤解 和也（TOHGE KAZUYA）
 金沢大学・電子情報学系・准教授
 研究者番号：30260558

研究成果の概要（和文）：複素平面上の有理型函数を係数とする微分、 $(q-)$ 差分或いは超離散方程式の可積分性を記述する値分布論的な性質として提案されていた位数が有限な有理型函数解の存在条件に対し、超位数が 1 未満であるというより緩やかな条件が最良であることを示した。また Halburd-Southall による max-plus の意味での有理型函数の Tropical Nevanlinna 理論に於いて第 2 主要定理の対応物を与えるなどの改良を行った。

研究成果の概要（英文）：Extending the known condition of the existence of finite-order solutions, we show that the assumption on its meromorphic solution to be of hyper-order less than one is a condition of integrability for some differential, $(q-)$ difference or ultra-discrete equations with the coefficients meromorphic in the plane. We also refine Tropical Nevanlinna theory on max-plus meromorphic functions due to Halburd-Southall by proving a counter-part of the Second Main Theorem in the classical Nevanlinna theory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：Nevanlinna 理論，有理型函数，正則曲線，複素常微分方程式，複素差分方程式，超離散方程式，周期函数，一意性問題

1. 研究開始当初の背景
 様々な分野で登場する解析的な函数が複素平

面全体に有理型に接続されるという性質をもつことで、複素解析をはじめとする解析学は

関連する研究領域で重要な貢献を果たしてきた。然しながらそれはなお「現在進行形」である。二つ例を挙げる。Painlevé 性をもつ超越函数の研究では福原満洲雄先生、木村俊房先生、岡本和夫先生を始め数多くの日本人研究者による成果を基礎として近年、下村俊氏、N. Steinmetz, I. Laine -A. Hinkkanen はその大域的な値分布に関する Nevanlinna 理論と局所的な性質に関するそれぞれ独自の理論と組み合わせる目覚ましい成果を挙げている。これらは上記の先駆者の洞察を元に、複素解析学の成果を「能動的」に微分方程式に応用したものである。これらの手法は、数理論理学の研究者や差分方程式への翻訳という形で複素解析学以外の分野で注目され応用が進んである。この方向の成果としては、柳原二郎先生、下村俊氏の研究を端緒とした M. J. Ablowitz, R. G. Halburd and B. Helbst, *On the extension of the Painlevé property to difference equations*, *Nonlinearity*, **13** (2000), 889-905 が代表的である。その後、Halburd and R. Korhonen による差分版の Nevanlinna 理論が完成し、微分方程式同様に $(q-)$ 差分方程式への貢献が模索されている。もうひとつの例は2次元の戸田格子に関する問題で、 $SU(n+1)$ に対する Toda system の解が平面上の正則曲線を用いて表現できることが E. Calabi や J. Jost and G. Wang, *Classification of solutions of a Toda system in \mathbb{R}^2* , *Intl. Math. Res. Notices*, (2002), no. 6, 277-290 他により示されている。このことは平面上の整函数を係数にもつ線形常微分方程式の有理型函数解の成す系、つまり射影空間への正則曲線を用いて表現でき、また仮定されている条件が Nevanlinna の意味での函数の位数有限性であることが A. Eremenko, *A Toda lattice in dimension 2 and Nevanlinna theory*, *Zh.*

Mat. Fiz. Anal. Geom. **3** (2007), no. 1, 39--46, 129 では複素解析の言葉で明示されている。この他に微分または差分方程式に限らず反復合成(iteration)とのかかわりでの Schroeder の方程式、数論とのかかわりでの Fermat 型函数方程式を満たす有理型函数・正則曲線をその値分布を通じて研究する方法、あるいは Nevanlinna-Cartan の値分布理論を直接翻訳してそれらの成果を「翻訳」(例えば P. Vojta による Diophantine approximation に関する) 研究などが、近年目覚ましい成果を挙げて、上記のように多くの物理学者からも注目されている。

本報告者のそれまでの研究成果は複素解析学の立場から平面上で定義される超越有理型函数或いは正則曲線が有する諸性質を値分布という側面から切り取ることで、微分方程式、 q -差分方程式を含む平面上の有理型函数を係数等を持つ函数方程式の大域解が存在するための必要条件、一意性を導くというものであった。その研究成果の一部と数理論理学者による Nevanlinna 理論を適用した上記したような研究との符合を発見して興味を持ったことが本研究の出発点である。さらにそうした研究成果と応募者の研究分野での成果と対比することで研究の新たな方向性と問題点が明確になっており、各分野で深い成果を上げている研究者を分担者として参加を請い、また必要に応じて適切な助言を期待できる国内外の研究者を招聘し、それぞれの協力を得れば課題の遂行ができると信じ立案するに至った。

2. 研究の目的

(1) 超越整函数を係数を持つ線形方程式の基本解系の oscillation (零点分布) に関して既知の成果を戸田格子に関する研究にさらに深く関連できる形に拡張する。特に、線形微分方程式の基本解系から作られる正則曲線に関して、Cartan の値分布理論をより自然な形

で精密化する。これにより、現在は有理型函数解個々に対しては判っている位数、零点分布などの評価を系としての評価に拡張し、方程式の係数が成す系とのより密接な関係を導く。そして線型方程式の、さらにそれを通して戸田格子等の研究に対する寄与を目指す。

(2) Nevanlinna 理論において主要な役割を演じる対数微分に対する評価式を「翻訳」することが、対応する分野で「値分布」理論を構築する基点となる。微分を $(q-)$ 差分で置き換えた対応物が、Halburd-Korhonen による研究成果の他にも最近複数のグループで成果が得られている。現在は、それを応用し差分方程式で Painlevé 性に対応する性質を見出そうとする試みが続けられている。本研究代表者および分担者・海外共同研究者それぞれの研究成果を集結し、この問題について成果を挙げる。まず、離散化された Painlevé 方程式と考えられているそれぞれの候補に対して、平面上の超越函数が存在するための必要条件を導く。一方で、初等関数や特殊関数などを用いて記述できる解を可能な限り構成し、Painlevé 性の対応物として適切か否かを評価し、可能であれば新たな提案を行う。

(3) 物理学、工学あるいは経済学などに現れる方程式について、その変数を複素数とした方程式対象に、これまで応募者・研究分担者による研究成果の適用を試みる。特に、大域的な超越有理型函数解の存在に関する考察と、その値分布についての評価を精密化し、それを指針として複素解析学の方向から推し進めていた値分布研究についての補完を試み、諸結果を他分野からの視点で見直す。これを通じて未解決である問題についても新たな解釈を行い、その解明に寄与する。

3. 研究の方法

本研究は、当初の計画通りにフィンランドの University of Eastern Finland, Joensuu

Campus の研究グループとの共同研究を背骨に遂行されたが、当グループとの関係は、当初予想よりも更に緊密なものとなった。実際、微分及び差分、 $q-$ 差分、超離散方程式に関する研究のために、研究代表者はフィンランドに2007年度と2009年度の2回渡航し、Joensuu 大学において I. Laine 教授と R. Korhonen 博士, J. Heittokangas 博士と共同研究を行った。更に、2007年は学位審査に関わり別途招聘された。これらの機会に加え、Laine 教授と Korhonen 博士は、本科学研究費補助金による招聘のほか日本学術振興会並びにフィンランドアカデミーからの支援による来日を実現し、金沢大学に本課題の研究期間2007年度から2009年度中にそれぞれ2回の長・短期の滞在し表記目的の実現のために極めて充実した集中討議がなされた。この議論の成果を、帰国後に各自が検証・精査して電子メールを通じての緊密な情報交換を行うという方法で次項の成果を得ることができた。尚、研究期間の終盤、共同研究の詰めを行うため招聘を予定していた Heittokangas 博士が新型インフルエンザに罹患するという予想しない事態で来日が叶わなかったが、その後、本研究代表者が当地に赴くことができ、当初の目的を不足なしに達成することができた。具体的な研究内容は、Laine 氏とは2階の線型方程式について未解決である Bank-Laine 予想の高階方程式で対応する予想が可能か否か等の研究を推し進め、また超離散方程式に関するネバンリンナ理論の拡張を目指した。Korhonen 博士との議論では差分作用素に対応する正則曲線の値分布論理論の完成の詰めを行った。さらに有理型函数について Halburd-Korhonen の理論を適用した差分方程式の分類問題を議論するとともに、そのトロピカル版の理論についてもどのような形が可能かを電子メールを用いて緊密に議論した。

Heittokangas 博士との議論では、整函数解についての Bank-Laine 予想が、その係数が単位円板内で解析的であるだけでは決して成立し得ないことを示す目的で、期間の最終盤は連日電子メールで集中的な議論を行った。

4. 研究成果

2007 年度には次のような研究成果を得た。研究代表者の藤解は、与えられた 2 以上の整数 n と超越整函数 E に対して n 階線型方程式とその基本解系 $\{f_1, \dots, f_n\}$ を次のように構成した: Wronski 行列 $W(f_1, \dots, f_n)$ が恒等的に 1 と正規化されており、その積が E に一致する。この応用として、零点分布に特異性のある基本解の系をもつ、整函数係数の正規化された同次 n 階線型方程式の例を得ることが可能になった。さらに、I. Laine 氏と共同して $n=2$ のときに未解決である Bank-Laine の予想について既知の結果の整理や新しい例などを与えた。また、R. Halburd 氏と R. Korhonen 氏との共同研究として Nevanlinna-Cartan の値分布理論の $(q-)$ 差分に対応する評価式を完成し、既知の結果の精密化や評価の最良性を示す例を構成した。この結果を応用して、増大度がある特別な意味で制限された有理型函数解を持つ 2 階差分方程式の特徴づけを行った。研究分担者として、下村氏は Painlevé 超越函数の角領域における値分布論を研究し、全平面上における自身の結果や関連結果の精密化をおこなった。また、quasi-Painlevé 性や Garnier 系に関する研究で興味深い成果を得た。また、森氏と藤解は Q. Han 氏と共同で新たな手法を用いて有理型函数の一意性に関する結果を精密化した。更に、石崎氏は戸田暢茂教授と共同して、ある種の代数的微分方程式が超越的な有理型函数解を持つ場合について詳細に調査し、その研究結果により本課題の目

的遂行に貢献した。

2008 年度、藤解は Korhonen 氏及び R. Halburd 教授との共同研究である差分作用素に対応する正則曲線の値分布論の研究について最初の成果がまとまり論文にした。また、成果の一部を研究代表者や共著者で口頭発表を行った。これまで有限位数の有理型函数しか扱うことができなかったが、本研究ではある種の制限のもとに無限位数函数および正則曲線の値分布までを扱うこと可能になった。さらにこの制限がそれ以上の改良ができない最良な評価であることについて例を与えて示した。また藤解は、Halburd 教授らが発表したトロピカル Nevanlinna 理論への興味から、値分布論についてのサーベイを依頼された函数論サマーセミナーでの講演で紹介を行いつつ、その拡張の可能性を模索した。招聘した Laine 教授とともに、考察する対象をトロピカルな有理型函数からより広い対象に拡張すべく、基本的な超離散方程式に対する区分的に線形な連続関数解に関する研究を行った。また、森氏は W. Lin 氏との共同研究により角領域での有理型函数に対する一意性定理の精密化を、下村氏は擬 Painlevé 性をもつ 2 階非線形微分方程式や P_{III} , P_V の値分布を、石崎氏はある種の函数方程式の満たす有理型函数の合成の意味での分解可能性をそれぞれに研究して新たな知見を得た。

2009 年度、藤解は Laine 教授と共同して、Halburd 教授他により提案された Tropical Nevanlinna 理論に於いて未解決であった「第二主要定理」の導出に成功した。さらにその精密化と応用についても新たな知見を得た。Korhonen 博士とは Halburd 教授との共同研究である差分作用素に対応する H. Cartan による正則曲線の値分布論研究を発展させ、その「トロピカル化」を試みほぼ満足できる成果

を得、論文`Tropical Nevanlinna-Cartan theory' を執筆中である。以上について成果の一部を研究代表者や共著者で口頭発表を行った。更に、これらが関連分野のどのような方程式に対して適用できるかについて調査し情報を整理している。

Heittokangas 博士とは、藤解が氏を訪問した折の議論をもとに、電子メールでの交信により細部を詰めた結果、超越整函数を係数とする2階同次線型方程式の整函数解の振動に関するBank とLaine による未解決予想の単位円板に対応する性質の不可能性を示すことに成功し、論文`A unit disc analogue of the Bank-Laine conjecture does not hold' の最終稿を完成させた。この予想は複素平面上と単位円板上それぞれで構築される類似の値分布理論をもとにしているが、それぞれの状況は全く異なることを示す興味深い結果となった。また副次的に、ある未解決問題を否定的に解決する結果ともなった。

更に、Korhonen 博士とはディオファントス近似に関して、上記の差分作用素に類似した評価式の成立の可否についての研究を行い、弱い形ではあるがある結果を得ており、現在、細部の検証を行っている。

以上により、当初計画した方法にほぼ沿った形で、本課題研究の目的を十分満足できる形で達成できたと考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

1. Tohge Kazuya, On Gundersen's solution to the Fermat-type functional equation of degree 6, Complex Variables and Elliptic Equations, in press, 2010, 1-18, 査読有
2. Laine Ilpo, Tohge Kazuya, Tropical Nevanlinna theory and second main theorem, arXiv.org arXiv:0910.5300, 2009, 1-43, 査読無

3. Halburd Rod, Korhonen Risto, Tohge Kazuya, Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages, arXiv.org, arXiv:0903.3236, 2009, 1-30, 査読無
4. Lin Weichuan and Mori Seiki, Uniqueness theorems of entire functions with shared-set in an angular domain, Acta Math. Sinica 24(2008), 1925-1934, 査読有
5. Shimomura Shun, Equi-distribution of values for the third and the fifth Painlevé's transcendents, Nagoya Math. J. 192(2008), 89-109, 査読有
6. Shimomura Shun, Nonlinear differential equations of second Painlevé's type with the quasi-Painlevé's property, Tohoku Math. J. 60(2008), 581-595, 査読有
7. Tohge Kazuya, Remarks on a special fundamental solution base and its product, Complex Analysis and its Applications, Proceedings of the 15th ICFIDCAA Osaka 2007, OCAMI Studies, 2 巻, 2008, 351-356, 査読有
8. Qi Han, Mori Seiki and Tohge Kazuya, On results of H. Ueda and G. Brosch concerning the unicity of meromorphic functions. J. Math. Anal. Appl. 335(2) (2007), 915-934, 査読有
9. Lin Weichuan, and Tohge Kazuya, On Shared-Value Properties of Painlevé's Transcendents, Computational Methods and Function Theory, 7 巻2号, 2007, 477-499, 査読有
10. Shimomura Shun, A class of differential equations of PI-type with the quasi-Painlevé's property, Ann. Mat. Pura Appl. (3) 186 (2007) 267-280, 査読有
11. Ishizaki Katsuya and Toda Nobushige, Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations, J. Aust. Math. Soc. 82, 2007, 1-24, 査読有

[学会発表] (計 13 件)

1. 藤解和也 and Laine Ilpo, Tropical Nevanlinna 理論とある超離散方程式の解について, 2010 年日本数学会年会, 2010 年 3 月 26 日, 慶應義塾大学矢上キ

- キャンパス (神奈川県)
2. 藤解和也, Tropical Nevanlinna theory and a second main theorem (joint work with Ilpo Laine), 複素解析研究集会, 2010年1月9日, 生涯学習センター 遊学館 (山形県)
 3. 藤解和也, Tropical Nevanlinna theory and solutions of some ultra-discrete equations (joint work with Ilpo Laine), 「等角写像論・値分布論」合同研究集会, 2009年12月5日, 東北大学青葉山キャンパス (宮城県)
 4. 藤解和也, Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages, 2009年度日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月26日, 大阪大学豊中キャンパス (大阪府)
 5. 石崎克也, On factorization of meromorphic solutions of some functional equations, 等角写像・値分布論 合同研究集会, 2008年11月30日 金沢大学サテライト・プラザ (石川県)
 6. 藤解和也, 値分布論入門, 第43回函数論サマーセミナー, 2008年8月24日, マホロバマイズ三浦 (神奈川県)
 7. Shimomura Shun, Painlevé transcendents in a sectorial domain, From Painlevé to Okamoto, 2008, 6, 12, University of Tokyo (東京都)
 8. 下村俊, 角領域における値分布論とその応用, 日本数学会年会 (函数論分科会特別講演), 2008年3月24日, 近畿大学(大阪府)
 9. 藤解和也, Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages (R. Halburd, R. Korhonen と共同) 「函数論と値分布論」小澤満先生七年忌追悼研究集会, 2008年2月9日, 東京工業大学 (東京都)
 10. 石崎克也, Difference operator and value distribution theory, 等角写像値分布論 合同研究集会, 2007年12月9日, 慶應義塾大学 (神奈川県)
 11. Tohge Kazuya, A special fundamental solution base and its product, The 15th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2 August, 2007, Osaka City University (大阪府)
 12. Mori Seiki, Topics on meromorphic mappings and defects, Workshop on value distribution theory and its

applications, 2007.7.23-29, Weihai International Center of Shandong University (中国)

[図書] (計1件)

1. Laine Ilpo and Tohge Kazuya, 'The Bank-Laine conjecture - a survey', Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis, Mathematics Monograph Series 11, Science Press, 2008, 433-453

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤解 和也 (TOHGE KAZUYA)
金沢大学・電子情報学系・准教授
研究者番号: 30260558

(2) 連携研究者

森 正気 (MORI SEIKI)
山形大学・理学部・教授
研究者番号: 80004456
(H19: 研究分担者)

下村 俊 (SHIMOMURA SHUN)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 00154328
(H19: 研究分担者)

石崎 克也 (ISHIZAKI KATSUYA)
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号: 60202991
(H19: 研究分担者)