

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540179

研究課題名(和文) 可積分系と数理物理の新たな接点の探求

研究課題名(英文) Search for new connection of integrable systems and mathematical physics

研究代表者

高崎 金久 (Takasaki Kanehisa)

京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授

研究者番号：40171433

研究成果の概要(和文)：

「可積分系」は「解ける」数理モデルの総称であり、多くの場合は微分方程式であるが、確率分布や確率過程として定式化されることもある。可積分系は系統的な方法で解くことができるだけでなく、しばしばその背後に豊かな数学的構造を備えている点でも興味深い対象である。本研究課題では2000年以降の数理物理の中から新たな題材を探り、可積分系固有の問題やゲージ理論・弦理論への応用に関して今後の新たな研究につながると期待されるいくつかの成果を得た。

研究成果の概要(英文)：

"Integrable systems" is a collective name for "solvable" mathematical models. They are mostly a differential equation, but some cases are formulated as a probability distribution or a stochastic process. Integrable systems are interesting not only because they can be solved by a systematic method, but also remarkable for rich mathematical structures hidden behind. In this research project, we sought for new material in mathematical physics after 2000, and obtained several results on integrable systems themselves and on their applications to gauge theory and string theory. These results are expected to lead to new research.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：可積分系，無分散可積分系，フェイ型等式，ランダム平面分割，量子トーラス代数，対数的時間発展，等角写像，準古典展開

1. 研究開始当初の背景

可積分系の現代的研究はもともと非線形波動などの数理物理の問題を扱うために始まったが、数学において独立した研究分野となった後も、数理物理と密接な関係を保ちつつ発展している。たとえば1980年代に登場した無限次元グラスマン多様体や無限次元リー代数を駆使する方法は1990年代に数理物理のランダム行列、弦理論、位相的場の理論、超対称場の理論などの研究に取り入れられて、それらの飛躍的發展に貢献した。そこから逆に可積分系研究に対しても新たな知見や研究課題がもたらされた。2000年以降はランダム分割、ランダム平面分割、ASEP、無衝突ランダムウォークなどの離散的・組み合わせ論的構造に基づくモデルがゲージ理論、弦理論、非平衡統計力学の研究において注目を集めており、本研究の開始までには、戸田階層などの可積分系との接点も少しずつ見出されつつあった。また、2000年頃にある種の界面成長のモデルと無分散戸田階層との関連が指摘されたことが契機となって、無分散可積分系が新たな観点から研究されるようになり、研究代表者らも数年にわたって関連する研究を続けていた。

2. 研究の目的

本研究では、研究代表者らが従来行ってきた研究をさらに発展させる一方で、統計力学や確率過程などから新しい題材も積極的に取り入れて、可積分系と数理物理の新たな関連を追及することをめざした。具体的には次のような項目を目標とした。

(1) 無分散可積分系に対してより深い理解や新たな応用をめざす。たとえば、解空間全体を幾何学的に捉える枠組を探す。また、そのような枠組みの中で方程式の対称性を用いて特殊解を特徴づける。

(2) 一般のルート系に付随するカロジェロ系に対して、ラックス表示の幾何学的意味や高次時間発展の取り扱いなど、未解明の問題に取り組む。

(3) ランダム平面分割、非交叉ランダムウォーク、レヴナー方程式などを題材にして、可積分系と確率過程との関わりを追求する。

(4) スペクトル曲線やロンキン関数などに注

目しながら、トーラス上のダイマーモデルと可積分系との関連を探る。

3. 研究の方法

(1) 無分散可積分系の研究においては、ラックス形式よりも無分散広田方程式やフェイ型等式を基本的な枠組として用いた。無分散広田方程式は通常の可積分系における広田方程式の対応物であるが、正確に言えば広田方程式そのものではなくて、フェイ型等式から一種の極限操作（無分散極限あるいは準古典極限）によって得られるものである。このような無分散広田方程式やフェイ型等式を用いて、D型可積分階層の無分散極限やウィットナム階層の有限変数簡約（ホドグラフ解法）などの問題を考察した。

(2) ランダム平面分割（溶解結晶モデル）の研究においては、分配函数のフェルミオン表示を通じて1次元戸田階層との関係を明らかにするとともに、熱力学極限においても無分散可積分系との関連を念頭に置きつつ考察を行った。戸田階層との関係を明らかにする過程で分配函数のフェルミオン表示の背後に量子トーラス代数が隠れていることを見出した。この量子トーラス代数を手がかりにしてモデルの隠れた対称性や一般化を考察した。さらに、球面のフルヴィッツ数の母函数とその一種の q 変形においても類似の対称性構造があることに注目した。

(3) 可積分階層の研究の新たな題材として、カーレット、ドゥブロビン、チャンが定式化した拡張戸田階層（1次元戸田階層の対数的時間発展による拡張）を取り上げて、双線形形式などの問題を考察した。双線形形式についてはミラノフによる定式化が知られているが、それが1次元戸田階層のいわゆる $2+1$ 次元拡張と似ていることに注目して、 $2+1$ 次元拡張の観点からラックス形式も含めて系の構造の見直しを行った。同様の観点からアブロヴィッツ・ラディック階層などに対数的時間発展を導入することを考えた。

(4) 無分散可積分系の解空間全体を記述する試みとして、テオが無分散戸田階層に対して等角写像の観点から導入した非退化解（解空間の一般の位置にある解）の概念に注目し、それを種数0の普遍ウィットナム階層に一般化することを考えた。さらに、アドラーとファンメルベクが戸田階層のランダム行

列解に(双直交多項式系を伴う)変種として考察した解から無分散極限によってテオの非退化解が得られる,ということに気がつき,その多成分化からの無分散極限として種数0の普遍ウィットム階層の非退化解を特徴付けることを試みた.

(5) エナールとオランタンがランダム行列に対して近年さかんに位相的展開(行列のサイズなどに関する展開で,各項はある種のグラフによる表示をもつ)を論じているが,それらのモデルの分配関数はKP階層や戸田階層の解(タウ函数)とみなせる.そこで,KP階層や戸田階層の解に対して直接に準古典展開を行うことを試みた.この展開の最低次の項は無分散KP階層や無分散戸田階層の解であり,そこから出発して順次高次の項を構成することが期待された.

4. 研究成果

(1) 種数0の普遍ウィットム階層の有限変数簡約(ホドグラフ解法)を考察し,無分散広田方程式やレヴナー型方程式との関係を明らかにした(論文9,学会発表6).また,D型可積分階層の一つであるパフ・戸田階層に対して,補助線形問題とフェイ型等式の関係や無分散極限において得られる方程式の構造を明らかにした(論文2,学会発表5).これらの成果によって,フェイ型等式とその無分散極限の重要性が改めて確認されるとともに,無分散極限におけるD型可積分階層とA型可積分階層(KP階層や戸田階層など)との違いが明確になった.

(2) 溶解結晶モデルの分配関数のフェルミオン表示に量子トーラス代数の構造が隠れていることを見出し,それを利用して,外部ポテンシャルを導入した分配関数が1次元戸田階層タウ函数と見なせることを示した(論文5,学会発表8).また,このモデルを少し変形したモデルでは1次元戸田階層と異なる戸田型可積分階層が現れることを見出した(論文3,学会発表4,1).さらに,前述の外部ポテンシャルが5次元U(1)超対称ゲージ理論のウィルソンループに対応することを指摘するとともに,溶解結晶モデルの熱力学極限から5次元超対称ゲージ理論サイバーク・ウィッテン曲線を導出した(論文4).この熱力学極限は戸田階層の無分散極限に対応しているはずであり,その観点からサイバーク・ウィッテン曲線の出現を説明することが望まれる.同様の意味で,フルヴィッツ数の母函数にはランベルトのW函数で定義される曲線が付随しているものと期待される.

(3) 1次元戸田階層の対数的時間発展と2+1次元拡張の関係を明らかにして,ミラノフの双線形式の奇妙な構造が2+1次元拡張の観点から明快に説明できることを指摘した(論文1).これを手がかりにして,アプロヴィッツ・ラディック階層に対しても対数的時間発展による拡張と2+1次元拡張を論じた(学会発表2).これらの結果は多成分系にも一般化できるものと期待される.対数的時間発展はもともと量子コホモロジーやフロベニウス多様体の研究に起源をもつものであり,アプロヴィッツ・ラディック階層や多成分系への拡張がそのような観点でどのような意味をもつかは興味ある問題である.

(4) 無分散戸田階層の非退化解の概念を種数0のウィットム階層に拡張し,等角写像の組の空間の一種の周期写像を用いてその構成法を与えた(論文投稿中).これは種数0のウィットム階層に対して幾何学的観点から一般解の記述を与えるものであり,無分散可積分系に関する当初の重要な目的の一つを達成したものである.この解と多重双直交多項式系との関係も明らかになりつつある.

(5) KP階層の解の準古典展開を一般的に定式化し,展開の最低次の項が無分散KP階層の解として与えられれば,高次の項が一種の漸化式(微分方程式)によって順次構成できる,ということを示した(論文投稿中).戸田階層についても同様の結果が得られている(論文準備中).今後はすでに知られているさまざまな特殊解や有限変数簡約との関係を探ることが重要な課題となる.

(6) 以上の成果以外にも,量子可積分系や確率過程に関する成果(論文6,7,10,11,13,14,学会発表3),シュューベルトカルキュラスに関する成果(論文8,学会発表7,9,10),シューア函数に関する成果(論文12)を得た.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計14件)

1. K. Takasaki, Two extensions of 1D Toda hierarchy, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 査読有, 2009, 印刷中.
2. K. Takasaki, Auxiliary linear problem, difference Fay identities and

- dispersionless limit of Pfaff-Toda hierarchy, SIGMA, 査読有, 2009, vol. 5, 109 (34 pages).
3. K. Takasaki, Integrable structure of melting crystal model with two q -parameters, Journal of Geometry and Physics, 査読有, vol. 59, 2009, pp. 1244-1257.
 4. T. Nakatsu, Y. Noma and K. Takasaki, extended 5d Seiberg-Witten Theory and Melting Crystal, Nuclear Physics B, 査読有, vol. 808, 2009, pp. 411-440.
 5. T. Nakatsu and K. Takasaki, Melting crystal, quantum torus and Toda hierarchy, Communications in Mathematical Physics, 査読有, 2009, vol. 285, pp. 445-468.
 6. S. Odake and R. Sasaki, Crum's Theorem for 'Discrete' Quantum Mechanics, Progress of Theoretical Physics, 査読有, vol. 122, 2009, pp. 1067-1079.
 7. R. Sasaki, Exactly Solvable Birth and Death Processes, Journal of Mathematical Physics, 査読有, vol. 50, 2009, 103509 (18 pages).
 8. T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, Transactions of American Mathematical Society, 査読有, vol. 361, 2009, pp. 5193-522.
 9. K. Takasaki and T. Takebe, Loewner equations, Hirota equations and reductions of universal Whitham hierarchy, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, 2008, vol. 41, 475206 (27 pages).
 10. S. Odake and R. Sasaki, Exactly solvable 'discrete' quantum mechanics; shape invariance, Heisenberg solutions, annihilation-creation operators and coherent states, Progress of Theoretical Physics, 査読有, vol. 119, 2008, pp. 663-700.
 11. S. Odake and R. Sasaki, Orthogonal Polynomials from Hermitian Matrices, Journal of Mathematical Physics, 査読有, vol. 49, 2008, 053503 (43 pages).
 12. T. Ikeda, H. Mizukawa, T. Nakajima and H.-F. Yamada, Mixed expansion formula for the rectangular Schur functions and the affine Lie algebra A1(1), Advances in Applied Mathematics, 査読有, vol. 40, 2008, pp. 514-535.
 13. S. Odake and R. Sasaki, Multi-particle quasi exactly solvable difference equations, Journal of Mathematical Physics, 査読有, 2007, 122105 (8 pages).
 14. S. Odake and R. Sasaki, Quasi exactly solvable difference equations, Journal of Mathematical Physics, 査読有, vol. 48, 2007, 122104 (11 pages).
- [学会発表] (計 11 件)
1. 高崎金久, 溶解結晶模型の可積分構造, 日本数学会 2010 年年会, 2010 年 3 月 27 日慶應義塾大学矢上キャンパス.
 2. 高崎金久, 対数的時間発展による非線形 Schroedinger 階層と Ablowitz-Ladik 階層の拡張, 日本数学会 2009 年秋季総合分科会, 2009 年 9 月 24 日大阪大学大学院理学研究科.
 3. K. Takasaki, KP and Toda tau functions in Bethe ansatz: a review, Workshop "Infinite Analysis 09 --- New trends in quantum integrable systems", 2009 年 6 月 28 日京都大学大学院理学研究科.
 4. 高崎金久, 2 個の q パラメータをもつランダム平面分割の可積分構造, 日本数学会 2009 年年会, 2009 年 3 月 28 日東京大学数理解析研究科.
 5. 高崎金久, Pfaff-Toda 階層の差分 Fay 等式, 日本数学会 2009 年年会, 2009 年 3 月 28 日東京大学数理解析研究科.
 6. K. Takasaki, Dispersionless Hirota equations and reduction of universal Whitham hierarchy, Workshop "Laplacian Growth and Related Topics", 2008 年 8 月 21 日モントリオール大学.
 7. 池田岳, 古典群の旗多様体と二重シューベルト多項式, 日本数学会年会, 2008 年 3 月 28 日近畿大学.
 8. 高崎金久, Integrable structure in melting crystal model of 5D gauge theory, Workshop "New Developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror Symmetry", 2008 年 1 月 10 日京都大学数理解析研究所.

9. 池田岳・成瀬弘, 等方型ガラスマン多様体の量子同変コホモロジー環, 日本数学会秋期総合分科会, 2007年9月21日東北大学.
10. 池田岳・成瀬弘, コミュニスキュール型旗多様体の同変シューベルトカリキュラス, 日本数学会秋期総合分科会, 2007年9月21日東北大学.

[図書] (計2件)

1. T. Ikeda and H. Naruse, Double Schubert polynomials and excited Young diagrams, RIMS Kokyuroku Bessatsu, vol. B11, 2009, pp. 87-100.
2. T. Nakatsu and K. Takasaki, Integrable structure of melting crystal model with external potentials, Proceeding of Workshop "New Developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror Symmetry" (Kyoto, 2008), Advanced Studies in Pure Mathematics vol. 59, pp. 201-223.

[その他]
ホームページ等

1. 高崎金久「ダイマー模型と幾何学 ―ケニオンとオクニコフー」, 数理科学 No. 546 (サイエンス社2008年12月), 特集「確率論的自然観 ―数学と物理の共進化―」, pp. 26-32.
2. 高崎金久, 「ランダム行列とランダムウォーク ―確率モデルにおける行列式構造―」, 京都大学情報学研究科中村・辻本研究室における連続広義 (2007年12月7, 11, 18日, 2008年5月8, 22, 29日, 6月5日).
3. 高崎金久, 「溶解結晶模型の可積分構造」, 東京可積分系セミナー玉原合宿2008 (東京大学玉原国際セミナーハウス2008年9月15日~18日)における講演.
4. 高崎金久, "Hurwitz numbers and tau functions", ワークショップ「テータ関数と可積分系」(九州大学六本松地区, 2008年12月20日~22日)における講演.
5. 高崎金久, 「球面のフルビッツ数とKP・戸田階層の特殊解」, 東京無限可積分系セミナー (2009年7月24日東京大学数理科学研究科)における講演.
6. 高崎金久, 「対数的時間発展による非線形Schroedinger階層とAblowitz-Ladik階層の拡張」, 研究集会「非線形波動の現

状と将来」(2009年11月19日~21日九州大学応用力学研究所)における講演.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高崎 金久(Takasaki Kanehisa)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授
研究者番号: 40171433

(2) 研究分担者

佐々木 隆(Sasaki Ryu)
京都大学・基礎物理学研究所・准教授
研究者番号: 20154007
(H21→H22:連携研究者)
武部 尚志(Takebe Takashi)
お茶の水女子大学・理学部・准教授
研究者番号: 60240727
(H21:連携研究者)
池田 岳(Ikeda Takeshi)
岡山理科大学・理学部・講師
研究者番号: 40309539
(H21→H22:連携研究者)

(3) 連携研究者

佐々木 隆(Sasaki Ryu)
京都大学・基礎物理学研究所・准教授
研究者番号: 20154007
武部 尚志(Takebe Takashi)
お茶の水女子大学・理学部・准教授
研究者番号: 60240727
池田 岳(Ikeda Takeshi)
岡山理科大学・理学部・講師
研究者番号: 40309539