様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 3 月 31 日現在

機関番号：１４６０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2010
課題番号：19540181
研究課題名（和文）　正則分岐被覆構造についての複素解析幾何学

研究課題名（英文）　Complex analytic geometry on the holomorphic branched covering structure

研究代表者　谷口　雅彦（TANIGUCHI MASAHIKO）
奈良女子大学・理学部・教授

研究者番号：50108974

研究成果の概要（和文）：多項式の力学系的モジュライ空間の新しい幾何学的コンパクト化を与え、さらに有理関数の力学系的モジュライ空間についても、そのほぼ大域的な座標を与えることに成功した。 次に、擬等角タイヒミュラー空間上の正則力学系に対するモジュライ空間に対する基礎理論を完成させ、その応用として正則写像の境界挙動に関する基本定理の証明に成功した。

研究成果の概要（英文）：The new geometrical compactification of the dynamical moduli space of polynomials is constructed, and also for the dynamical moduli space of rational functions, a natural system of global virtual coordinates is obtained. Next, a basic theory of the moduli spaces for holomorphic dynamics acting on the quasiconformal Teichmueller space is completely established, and furthermore as application, a fundamental theorem on the boundary behavior of holomorphic maps is proved.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：複素解析学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：複素解析、複素幾何、複素力学系

１．研究開始当初の背景

（１）正則写像の与える正則分岐被覆構造は、いわば「写像のグラフ」であり、その幾何学的特性の早期解明の必要性は明らかであった。しかし、正則分岐被覆構造についての幾何学的理論構築は、実変数関数の場合に比べて格段に難しく、複素１変数多項式の場合に限っても、半世紀にわたり未解決であるセンドフ予想や複素力学系理論との関連から生じたスメール予想など、正則分岐被覆構造に直接的に係る多くの未解決問題が残存していた。有理関数の場合にはさらに困難性が増加し、より一般的な複素１変数正則写像の場合については、出発点ともいえる複素構造の型問題が未だに満足のいく解決を見ていなかった。ましてや多変数正則写像の場合の研究は、当時なお黎明期にあるといってよい状態であった。
（２）当時、正則自己写像の反復合成による力学系（正則力学系）が広く注目されはじめていたが、正則写像の力学系的構造とは、まさに正則写像が与える正則分岐被覆構造の

メビウス共役類であり、対応する正則分岐被覆構造の幾何学的解明無しには、決して明らかにならない対象であると言えた。正則力学系の理論が複素１変数多項式の場合すら不十分であり、一方で更なる一般化を容易に許さないことは、対応する正則分岐被覆構造の研究が未成熟であることに起因していることを発見したことが、本課題での研究にとっての契機となった。

（３）研究代表者の谷口は、本課題での研究開始以前に、数年にわたり正則分岐被覆構造の研究を進めてきた。特に有理関数の場合には、定義域の制限により等角写像論においてベル表現空間という全く新しい表現空間が与られるというベル予想を、韓国のジェオン氏との共同研究で肯定的に解決した。さらに代表者の谷口は、超越整函数の場合にも正則分岐被覆構造のグラフ表現である配置樹形という概念を導入し、これも代表者が導入した構造有限性を持つ超越整函数による正則分岐被覆構造を精密に記述することに成功していた。また、その正則力学系理論への応用として、構造有限な超越整関数の場合には、生成されるジュリア集合のハウスドルフ次元が常に２であることも発見していた。また、２つの構造有限な整函数が可換ならば、いくつかの例外の場合を除き、正則分岐被覆構造が一致するという基本的事実の証明にも成功していた。後者の結果は、１世紀にわたり未解決だったジュリア予想を、その場合に解決した特筆すべき成果であるといえる。

（４）以上のような当時の状況を踏まえ、最も基本的な有限性を持つ関数である有理関数の場合に、対応する正則分岐被覆構造に対する包括的な一般理論構築をめざして、本課題での研究を開始することとなった。

２．研究の目的

本課題での研究では、研究対象を複素１変数正則写像、その中でも特に、多項式写像や有理関数などに限定し、それらに対応する正則分岐被覆構造を複素幾何学に、かつ複素力学系理論の視点から、解明することを最優先すべき目的とした。具体的には次のようなテーマを重点目標に設定した。

（１）等角写像論において新しい標準領域族を与えることがわかったベル表現と付随するベル標準領域に対し、それらの正則分岐被服構造の変形空間、あるいは力学系的変形空間、の幾何学的構造を決定し、それらの上に作用する正則自己同型写像類群の構造を解明する。

（２）一般リーマン面の正則自己写像に対して、対応するタイヒミュラー空間上の正則力学系の性質を包括的に明らかにする基礎理論の構築をめざす。特に基本的有限性を持つ正則自己写像として、有理関数によるリーマン球面の正則自己写像に対する力学系的タイヒミュラー空間の幾何学的構造を明らかにし、その相対コンパクトな表現空間における境界点に対応する正則力学系の具体的記述、特にカオス性や相転移等の分岐現象を、統一的に解明する。

（３）より一般に、複素１変数正則写像による正則分岐被覆構造の表現空間に対し、それらの幾何学的コンパクト化あるいは完備化を具体的に構成し、その性質を解明する。

（４）多項式・有理式・整関数の反復合成による正則力学系に対し、それまでに得られた様々な成果を包摂できる一般的な正則分岐被覆構造の表現空間と、その空間に作用する正則自己写像に関する正則力学系理論を構築する。

３．研究の方法

（１）本課題である正則関数による正則分岐被覆構造の研究には、まず基本的な関数族についての各論の深化が不可欠である。本研究においては、そのような基本的な関数族として、

(a)多項式写像族

(b)単純な極因子をもつ有理関数族

(c)構造有限な超越整函数族

に対する個別研究に重点を置いた。特にｂ）の関数族は、ベル表現の一般化として、きわめて独創的な視点から設定された世界的にも斬新な研究対象である。

研究を進める具体的方法としては、個々の研究者たちとの個別の研究連絡や情報交換を基本とした。さらに国内外の関係すると思われる研究者たちを集め、さまざまな形態の研究集会やシンポジウムなどを、定期的に開催することを心がけた。そのような研究集会やシンポジウムを通した、国内外の研究者たちとの交流を目的としつつ、既知の成果から派生する新たな問題の提起やそれまでの研究成果の総括をはかるためである。また、得られた成果はすべて、論文の公刊や研究集会での講演を通して、関係する研究者たちに公開されることとし、その後の研究にフィードバックさせていった。

（２）まず、(a)多項式写像族については、すでに大域的なヴァーチャル座標がいくつか知られていたが、多項式写像による正則分岐被覆構造の変形空間に対し、その幾何学的構造を理解するには、そのコンパクト化の具体的な構成が不可欠であった。そのために、正則力学系的観点から、固定点集合に付随する不変量を用いて、最も自然な複素幾何学的コンパクト化を構成し、その境界点に対して、対応する一般化された正則写像の幾何学的性質の解明をめざす方法を選択した。さらにその際に、幾何学的函数論における諸成果が大きく寄与できることが予想されていたの

で、幾何学的函数論との対比を基本的方法とした。
（３）次に(b)単純な極因子をもつ有理関数族のうち、同じ次数で一般的位置にあるもの全体は、本研究開始以前に公刊された

The Hurwitz space of a Bell representation, Moonja Jeong and Masahiko Taniguchi, Proc. 12th ICFIDCAA (2005), 121-128.

で明らかにしたように、いわゆる古典的フルヴィッツ空間を構成する。しかし正則分岐被覆構造の表現空間としては、一般的位置にある有理関数だけを考察していたのでは不十分であることは自明であった。したがって、この場合にも、より制御しやすい幾何学的コンパクト化を構成するなど、包括的で十分な情報が解読できる表現空間の導入をはかることを、この場合の研究遂行のための基本的方法とした。
（４）(c)構造有限な超越整関数の場合には、より一般的な「配置樹形」の表現空間を用いる方法によりさまざまな成果が得られていた。たとえば本研究開始以前に公刊された

Covering structure and dynamical structure of a structurally finite entire function, Masahiko Taniguchi, Kodai Math. J. 28 (2005)

において、ピルグリムの先駆的研究をリットの古典的研究と統合することにより、構造有限な超越整関数の２回の反復合成に対する正則分岐被覆構造が、いくつかのよく知られた例外を除き、対応する正則力学系的構造を決定することを証明した。これらの知見からも、正則分岐被覆構造の研究での知見から、正則力学系的モジュライ空間の幾何学的構造の性質を明らかにするという方法が有効であることは保証されていたので、その方法を堅持した。
（５）以上の正則分岐被覆構造に対する個別的研究成果の統合に向のために、研究開始当時に急激に進展していた、無限次元擬等角タイヒミュラー理論を用いる方法を採用した。実際、本研究開始以前に公刊された先駆的共著論文

On the action of the mapping class group for Riemann surfaces ofinfinite type, E. Fujikawa, H. Shiga, and Masahiko Taniguchi, J. Math. Soc. Japan, 56 (2004) 1069--1086.

は、まさに無限次元擬等角タイヒミュラー理論が正則分岐被覆構造の一般的変形空間論を構築する上で極めて有効であることを示していた。従って、無限次元擬等角タイヒミュラー理論をさらに深化させ、その理論的整備を進めることで、多項式・有理式・整関数による正則力学系に対する既知の成果を総括できるような、正則分岐被覆構造の具体的表現空間の構成と、それら上の正則自己写像による力学系理論の構築を進めることを、この方向性での研究における基本的方法とすることとした。

４．研究成果
（１）多項式写像による力学系的モジュライ空間のコンパクト化は、防衛大学校の藤村雅代氏との共同研究により、2008 年夏には基礎理論が完成した。その特筆すべき成果は、アメリカ数学会の機関誌のひとつから

A compactification of the moduli space of polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), 3601-3609.

として公表された。
その力学系的意味付けと重要性については、2008 年の京都工芸繊維大学における国際研究集会の際に、アメリカのデ・マルコ氏らと情報交換を行うことができたが、その過程で上記成果の有理関数の場合への拡張可能性が明らかになった。そのための準備段階として、まず研究対象とした有理関数による正則分岐被覆構造のグラフ表現について、配置樹形表現より精緻なグラフ表現である最新の庭表現を用いて得られた成果を、奈良女子大学大学院の玉栄清華氏およびアフガニスタンからの奈良女子大学大学院への留学生 Mohaby Karima 氏との共著論文

Topological representation of the branched covering structure induced from a real rational function, R. I. M. S. kokyuroku 1717 (2010), 29-37

として公表した。さらに、与えられた庭表現に対する有理関数の具体的構成法についても、玉栄氏とその成果を取りまとめることができており、その成果の重要性から現在共著論文として投稿中であるが、近い将来に受理されるであろうと考える。
（２）有理関数による正則分岐被覆構造の研究のうち、単純な極因子をもつ有理関数族については、ベル表現の幾何学的特性に関する理解が韓国の M. Jeong 氏との議論の中で深められた。特にアニュライの場合の考察から未知の興味深い関数等式が得られ、韓国の Jong-Won Oh 氏も含めた共著論文

Equivalence problem for annuli and Bell representations in the plane, Journal Math. Anal. Appl., 325 (2007), 1295-1305.

として公刊できた。
さらに、多項式の力学系的モジュライ空間のコンパクト化を有理関数に一般化することを目的とした研究の過程で、有理関数の表現空間として、新しい関数族を構成することができた。これも防衛大学校の藤村氏との共同研究であるが、その過程でさらに有理関数の特異点表現と上記の表現空間との関連が明らかにされることとなった。これらの成果はまた、標準領域としてのベル表現がベル領

域の範疇を超えて一般化できることを意味していたが、この発見は、その後の研究に大きな影響を与えることになった。特に、防衛大学校の藤村氏とはさらに、ミルナーにより述べられた基本的課題のひとつである「有理関数に対する力学系的モジュライ空間における大域的ヴァーチァル座標の構成」を与えることに成功した。その成果は数式計算の手法を用いる独創的なもので、著名なアメリカ数学会の専門雑誌のひとつに共著論文

Stratification and coordinate systems for the moduli space of rational functions, Conf. Geom. and Dynam., 14 (2010), 141-153

として公刊された。その証明には、やはりベル表現の性質が本質的に使われていることは特筆すべきであろう。なお、この成果の帰結の一つとして、奈良女子大学大学院の M. Karima 氏は、代表者の指導のもとに、正則分岐被覆構造に付随するベル表現に対する新たな幾何学的モジュライ・パラメーターを特定することに成功し、単著論文

Bell domains and critical point parameters for triply connected planar domains, Annual Rep. Graduate School, Nara Women's University, 26 (2010), 275-284

として公表された。

なお、上記のように、数式処理や数値計算の手法がこのような成果の検証・予測に極めて有用であったが、そのような手法をさらに適用することで、代表者の谷口および藤村氏と karima 氏との共著論文

The Bell locus of rational functions and problems of Goldberg, Comm. JSSAC, to appear.

において、ゴールドバーグの古典的な問題を低次数の場合に完全に解決した。この数式処理技術をもちいた完全解決は、今後のこの問題の研究の方向性にも大きな影響を与えていると考える。

（３）整関数の与える正則分岐被覆構造については、高知大学の諸沢俊介氏との共同研究において、有理関数と構造有限な整関数との類似性が力学系的レベルでも成り立つことを発見することができた。成果をまとめるまでの前段階として、さまざまな具体例についてのシミュレーションに、かなりの時間を費やしたが、諸澤氏との共著論文

Dynamics of structurally finite entire functions with two singular values, Comp. Meth. Funct. Th., 9 (2009), 185-198.

により、構造有限な整関数による正則力学系の相転移や分岐現象に対して、表現空間の幾何学的基本構造についてほぼ完全な解明がなされた。これは有理関数の場合のミルナーの成果に匹敵する成果であるだけでなく、両者の類似性を明らかにした非常に興味深い成果である。

（４）最後に、一般の非例外型リーマン面の正則自己写像に対する正則分岐被覆構造の力学系的研究については、岡山大学の松崎克彦氏や千葉大学の藤川英華氏とともに研究を続けることで、対応する力学系的モジュライ空間についての基本理論の構築がほぼ完成でき、その成果は上記３名の共著論文

Dynamics on Teichmüller spaces and self-covering of Riemann surfaces, Math. Zeitschr., 260 (2008), 865-888.

として、世界的に著名な数学専門雑誌から公刊された。

なお、それに先立つ 2007 年度に、上記の研究に関連して京都大学数理解析研究所において藤川氏を中心とする国際的な共同研究集会「無限次元タイヒミュラー空間とモジュライ空間」が開催され、招待講演も行った。この集会が、上記の論文に述べられた基礎理論を完成させるうえでも情報収集等の点でも、極めて重要な役割を果たした。さらに、この研究集会の過程で、幾何学的関数論における古典的定理に関する興味深い応用を発見することもできた。その成果は共著論文

Structure theorem for holomorphic self-covers and its applications, R. I. M. S. Kôkyûroku Bessatsu, B17 (2010), 21-36

として公刊されたが、この特筆すべき結果は、無限次元タイヒミュラー空間上の正則自己写像に対する一般正則力学系理論の応用として、正則写像の境界挙動に関する基本定理の証明に成功しているという点で、今後の幾何学的函数論や擬等角タイヒミュラー理論の研究への良い影響が期待される。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① Masayo Fujimura and Masahiko Taniguchi, Stratification and coordinate systems for the moduli space of rational functions, Conf. Geom. and Dynam., 査読有, 14 (2010), 141-153.

② Ege Fujikawa, Katsuhiko Matsuzaki, and Masahiko Taniguchi, Structure theorem for holomorphic self-covers and its appli cations, R.I.M.S. Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B17 (2010), 21-36.

③ Masayo Fujimura, Mohaby Karima, and Masahiko Taniguchi, The Bell locus of rational functions and problems of Goldberg, Comm. JSSAC, 査読有, to appear.

④ Mohaby Karima, Sayaka Tamae, and Masahiko Taniguchi, Topological representation of the branched covering structure induced from a real rational function, R. I. M. S. kokyuroku, 査読有, 1717 (2010), 29-37.

⑤ Shunsuke Morosawa and Masahiko Taniguchi, Dynamics of structurally finite entire functions with two singular values, Comp. Meth. Funct. Th., 査読有, 9 (2009), 185-198.

⑥ Ege Fujikawa, Katsuhiko Matsuzaki and Masahiko Taniguchi, Dynamics on Teichmüller spaces and self-covering of Riemann surfaces, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 260 (2008), 865-888.

⑦ Masayo Fujimura and Masahiko Taniguchi, A compactification of the moduli space of polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, 136 (2008), 3601-3609.

⑧ Masayo Fujimura and Masahiko Taniguchi, The moduli space of polynomials and its compactification, Complex Analysis and its Applications, 査読有, 1 (2008), 175-178.

⑨ Moonja Jeong, Jong-Won Oh, and Masahiko Taniguchi, Equivalence problem for annuli and Bell representations in the plane, Journal Math.Anal. Appl., 査読有, 325 (2007), 1295-1305.

〔学会発表〕(計 ２件)

① Masahiko Taniguchi, Degeneration of polynomial maps, 国際研究集会「Moduli and invariants in complex analysis and algebraic geometry」, 2008年11月26日, 京都工芸繊維大学.

② Masayo Fujimura and Masahiko Taniguchi, The moduli space of polynomials and its compactification, 15回ＦＩＤＣＡ国際学会, 2007年8月31日, 大阪市立大学学術情報総合センター

〔その他〕

なし

６．研究組織

(1)研究代表者

谷口　雅彦 (TANIGUCHI MASAHIKO)
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号：50108974

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし