

平成 22 年 4 月 23 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540184

研究課題名 (和文) 非有界領域上の双曲型方程式のエネルギー評価とその応用

研究課題名 (英文) Energy estimates for hyperbolic equations in unbounded domains and their applications

研究代表者

池島 良 (IKEHATA RYO)

広島大学・大学院教育学研究科・准教授

研究者番号：10249758

研究成果の概要 (和文)：臨界的空間変数係数を摩擦項にもつ半線形波動方程式のエネルギー減衰率の特定、劣臨界的空間変数係数を摩擦項としてもつ半線型波動方程式の藤田型臨界指数の特定、そして非等方的変数係数をもつ波動方程式の局所エネルギー減衰率の特定、についての結果を得た。

研究成果の概要 (英文)：Firstly we determined the decay rate of the energy for some semi-linear wave equations with a damping coefficient decaying critically near infinity. Secondly we obtained the local energy decay property in an exterior domain for the linear wave equations with anisotropic variable coefficients, and finally we found the so called Fujita type critical exponent for some semi-linear damped wave equations with a sub-critical potential.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式

## 1. 研究開始当初の背景

(1) まず空間遠方にて臨界的に減衰する摩擦係数を持つ、線型波動方程式のエネルギーの減衰評価については、日本人数学者による先駆的貢献がすでに 70 年代中ごろよりなされていたが (松村氏、望月氏、上坂氏)、その半線型版についての研究は、ほとんど見当

たらなかったが 2000 年代に入り米国テネシ—大学の数学者である G.Todorova 氏と B.Yordanov 氏による新しいマルチプライヤ—法の開発により、一挙に半線型問題への関心が高まった。2000 年代に入ってから 10 年は、彼らの Damped wave equation の分野への与えた影響は計り知れないと言える。其の問題意識の中心は、なんとと言っても当該

Damped wave equation の持っている、いわゆる「拡散構造」を如何に抉り出すか、にあると言える。摩擦係数の時間空間的な強弱によって、対応する方程式の拡散構造もいろいろに変化するわけで、そういった構造に着目する研究は、(研究代表者の感覚では) 近年佳境を迎えて来ているようだ。

(2) 線型波動方程式の局所エネルギー減衰率の特定問題については、1960年代のMorawetz氏の先駆的・画期的な研究を端緒として、それ以降多くの研究者によって様々に展開されて来たが、近年、研究代表者によって、初期値のサポートのコンパクト性を除去する簡便な方法が提出されて以来、その方法がどの程度のクラスの双曲型方程式にまで適用できるか、という問題意識・機運が高まって来ていた。研究代表者の感覚では、局所エネルギーの一樣減衰率を導出する過去の一連の研究において、あまり初期値に課せられた条件をどこまで緩められるか、という問題意識で取り組んで来た先行研究は極めて少ないように感じていただけに、そういったマルチプライヤー法に基礎をおいた簡便な方法の提出は、新たな研究への意識を高めつつあるようだ。

## 2. 研究の目的

(1) 空間遠方にて臨界的に代数減衰する、吸収項を伴う半線型波動方程式の初期値問題の全エネルギーの減衰率を特定すること。

(2) 空間遠方にて劣臨界的に代数減衰する摩擦係数と、巾型爆発項を伴う半線型波動方程式の初期値問題を考察し、そのいわゆる藤田型の臨界指数を発見し、更にそのエネルギーの最良な減衰率を特定し、方程式の拡散構造を抉り出すこと。

(3) 非等方的な変数係数を持つ散散型の双曲型偏微分方程式の外部混合問題の局所エネルギーの一樣減衰率に、その非等方性を決めるパラメータがどのように絡んでくるかを明らかにすること。

## 3. 研究の方法

(1) まず、これまでに知られている関連する過去の研究結果を調べ、その証明方法を検討し、当該問題への適用の可能性を試みる。したがって、関連する国内外の研究集会等に出張し、最新の研究成果を調査し、共同研究者や近接領域の研究者との研究連絡・情報交換を複数回行った。また、偏微分方程式関連や関数解析、実解析関連の基礎的な邦書・洋書の購入を行い、適用可能な基礎知識の整理を行った。

(2) 研究代表者が1999年に開発した、時間発展するあるクラスの偏微分方程式の解の $L^2$ -有界性を得る簡便な方法が適用可能かどうかについても検討した。ある問題についての2次元の結果を得る際には、この方法が未だ決定的な役割を演ずる、という貴重な体験もした。

(3) Todorova-Yordanovによってすでに得られている線型波動方程式の全エネルギーについての基礎的減衰評価の方法を再検討し、更にそれが対応する非線型問題にどの程度応用できるかどうかについて吟味し、適用不可能な部分についての新しいアイデアを模索した。したがって、研究代表者は2008年度末には、直接共同研究者である米国テネシー大学のG. Todorova氏を訪問し、研究連絡を行った。

(4) また、最終年度にはそれまでに得られたいくつかの結果の公表のための出張を複数回行った。更に、論文作成のためのコンピュータなど、これまで使用していた関連機器が古くなり、そのことで度々論文作成の障害となっていたこともあり、最新のコンピュータ等を購入し、今後の研究のための環境整備も行った。

## 4. 研究成果

(1) 全空間において設定された、空間遠方においてある意味において臨界的に減衰する摩擦係数と、巾型非線型吸収項を伴う半線型波動方程式の初期値問題を扱い、その全エネルギーの時間減衰率を特定することに成功した(文献③にて公表済み)。このタイプの結果の線型版については、これまでに望月氏や松村氏、上坂氏などの日本人研究者によって、過去において研究されてきているが、それらの結果からの直接的な応用によっては、当該問題の結果を得ることは出来ないで、新たな方法を提示しながら解決しなくてはならないところに問題の難しさがある。ここでは、波の有限伝播速度の性質と非線型項の単調性、更には摩擦係数が空間無限遠にて臨界的に代数減衰する条件とを巧く使い、いわゆるマルチプライヤー法に依って所与の結果を得るに至った。この方法の利点としては、摩擦係数が臨界的に時間にも依存する場合にも適用可能であることが挙げられる。

(2) 全空間において考察された、空間遠方において“劣”臨界的に代数減衰する摩擦係数と巾型爆発項を伴う半線型波動方程式の初期値問題を扱い、その巾型非線型項の指数の、いわゆる藤田型臨界指数を特定し、更にそのエネルギーの(ほぼ)最良な減衰率を決定することに成功した(文献②で公表済み)。定

数係数の摩擦項を持つ半線型波動方程式の対応する臨界指数問題については、2000年代に入り盛んに研究されてきているが、そこで得られた重要な知見のひとつである、方程式の持つ、いわゆる“拡散構造”をどう切り出すか、という視点がそれら一連の先行研究の主な研究テーマである。当然、より一般化された空間依存の摩擦係数を持つ波動方程式の同様な問題を考える、ということは、極めて自然な問題意識である。研究代表者は、それまで対応する線型の方程式の基礎的なエネルギー減衰率の特定についての研究結果を得ている、米国テネシー大学のG. Todorova, B. Yordanov 等との共同研究によって、その難解な非線型問題のほぼ満足のいく結果を得るに至った。摩擦係数の空間遠方にて代数減衰する速さに応じて、対応する藤田型臨界指数が大きくなり、従ってそれだけ方程式の不安定さが、非線型項の指数領域に反映し増大して行くようである。ちなみにこの研究成果は、当該問題についての国内外での最初の成果であり、今後この分野の基礎的文献として必ずや引用されなければならない決定的なものとなるはずである。この研究の今後の展開としては、“劣”臨界的に空間遠方にて減衰する摩擦係数を持つ波動方程式の研究から、今度はその摩擦係数が空間遠方にて“臨界的”に代数減衰する場合の全エネルギーの減衰率と対応する非線型問題の藤田型臨界指数の特定問題の解決にその関心がむけられている。これについては、現在、G. Todorova と B. Yordanov との共同研究を継続中であり、ある程度の知見が得られている段階である。

(3) 有界な星型障害物の外部領域において考察された、“非等方的”な変数係数を持つ双曲型偏微分方程式の初期値一境界値問題の様な局所エネルギーの減衰率を特定することに成功し、その方程式の非等方性を決めるパラメータがどのようにその減衰率に絡んでくるかを明らかにすることが出来た(文献①にて公表済み)。研究成果の位置付けとしては、これまでは空間遠方にて“等方的”でかつその初期値のサポートがコンパクトな場合の結果については、1960年代のZachmanoglou氏の2つの論文が公表されているし、1980年代のMuravei氏の研究では、初期値のサポートのコンパクト性は除去されたものの、等方的な場合での(実際には、定数係数の通常の波動方程式が考察されている)研究結果でしかなかった。したがって、空間遠方で定数係数ではあるが、しかしながら非等方性は保った、主要部が発散形式の変数係数を持つ当該問題についての、局所エネルギー減衰についての研究は、国内・外においても先駆的であると言える。その証明方法がまた極めて簡便であり、単なる部分積分法

の応用でしかないのが特徴的であるが、随所に意外なアイデアが駆使されたユニークな結果である。その決定的な方法は3つあり、その一つは研究代表者が1999年に松山氏と発見した、Morawetzの方法を本質的に改良した池島—松山の方法、次に2001年に摩擦項を持つ波動方程式の臨界指数問題を解決するために新たに提出されたTodorova-Yordanovの重みつきエネルギー法、そして最後に非等方性を巧く処理してMorawetzのマルチプライヤー法を展開するための相川—池島分解法のアイデアである。この研究の今後の展望としては、当該問題始めこの分野の局所エネルギーの様な減衰問題のすべてが、方程式の係数が空間遠方にて定数(等方・非等方あるにせよ)になる場合のみ考察されているようであるが、この「空間遠方にて定数」であるという条件を除去することが、次の重要な取り組むべき問題であると認識するので、その完全解決のための新たなアイデアを提示することが急務である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Shintaro AIKAWA, Ryo IKEHATA, Local energy decay for a class of hyperbolic equations, *Mathematische Nachrichten*, 査読有, Vol. 283, 2010, pp. 636-647.
- ② Ryo IKEHATA, Grozdena TODOROVA, Borislav YORDANOV, Critical exponent for semilinear wave equations with a subcritical potential, *Funkcialaj Ekvacioj*, 査読有, Vol. 52, 2009, pp. 411-435.
- ③ Ryo IKEHATA, Yu-ki INOUE, Total energy decay for semi-linear wave equations with a critical potential type of damping, *Nonlinear Analysis*, 査読有, Vol. 69, 2008, pp. 1369-1401.

[学会発表] (計5件)

- ① 池島 良, 臨界ポテンシャルを持つ線型波動方程式のエネルギーの最良減衰率, 研究集会「第5回非線形の諸問題」, 2009年9月21日, 長崎商工会議所
- ② 池島 良, Decay estimates of the energy for wave equations with a critical potential, 「流体と気体の数学解析」研究集会, 2009年7月8日, 京都大学数理解析研究所(京大会館)
- ③ 池島 良, 非有界領域上の双曲型方程式のエネルギー減衰, 研究集会「第4回非線型の諸問題」, 2008年9月21日, 佐

賀大学理工学部

- ④ Ryo IKEHATA, Local energy decay for a class of hyperbolic equations with anisotropic variable coefficients, 第7回AIMS Conference, 2008年5月24日, University of Arlington, Texas USA
- ⑤ 池島 良, 非等方的変数係数をもつあるクラスの双曲型方程式の局所エネルギー減衰, 第461回「応用解析」研究会, 2007年5月17日, 早稲田大学理工学部

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

池島 良 (IKEHATA RYO)

広島大学・大学院教育学研究科・准教授

研究者番号：10249758

### (2) 研究分担者

川下美潮 (KAWASHITA MISHIO)

広島大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：80214633

(H20→H21：連携研究者)

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：