

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540185

研究課題名（和文） ソボレフ関数のポテンシャル論的研究

研究課題名（英文） Potential theoretic study of Sobolev functions

研究代表者

下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)

広島大学・大学院教育学研究科・准教授

研究者番号：50294476

研究成果の概要：実解析学だけでなく、偏微分方程式論、電気流動学などへの応用を念頭に、ソボレフ関数を利用して、さまざまな関数空間におけるソボレフ型定理を発展させたり、楕円型偏微分方程式を考察したりするポテンシャル論的研究を行った。例えば、変動指数をもつ関数空間における極大関数の有界性を導き、その応用として、ソボレフの不等式や Trudinger 指数積分不等式について新しい知見を得るなど、ソボレフの定理を発展させることができた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ソボレフ関数、楕円型偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

楕円型偏微分方程式の解について、存在と一意性、正則性などの解析的な性質を研究する方法はいくつかあるが、ペロンの方法に代表されるポテンシャル論的方法はその有力なものの一つである。特に、楕円型偏微分方程式の解の研究において、ソボレフ関数は非常に有用な道具となる。

ソボレフ空間は古典的にはユークリッド空間において定義されてきたが、一般の距離空間上でのソボレフ関数の研究が、微分幾何学やグラフ上の解析学などへの応用をにらんで、フィンランド学派の数学者を中心に精力的に進められており、今後さらなる発展が期待されている。

また、電気流動学や弾性学などへの応用を念頭において、変動指数をもつ偏微分方

程式の考察とそのための関数空間の理論が重要であることが知られている。例えば、2つの電極板の間を複雑な動きをしながら粒子が通過する現象を考えると、電場の大きさに依存する変動指数をもつ偏微分方程式が現れる。したがって、これを解析するために変動指数をもつ関数空間の研究が必要となる。変動指数をもつ関数空間に関してはまだまだ知られていないことが多く、今後この方向の研究がますます重要になっていくものと考えられる。

2. 研究の目的

(1) 電気流動学や弾性学などへの応用のために、変動指数をもつ関数空間の重要性を明らかにし、変動指数をもつソボレフ空間、 O

Orlicz空間、Morrey空間などの関数空間においてソボレフ型定理を発展させ、ソボレフ関数の正則性を調べる。

(2) 偏微分方程式論、多様体上の微分幾何学やグラフ上の解析学などへの応用のために、距離空間上においてソボレフ型定理を発展させ、ソボレフ関数の正則性を調べる。

(3) 自己相似集合に代表されるフラクタル上のポテンシャル問題、特にフラクタル境界をもつ領域におけるソボレフ関数の境界挙動を調べる。

(4) 非線形楕円型偏微分方程式の解の性質、ペロン法による非線形ディリクレ問題を調べる。

3. 研究の方法

平成19年度は、研究代表者は、研究分担者が研究打ち合わせを行えるよう日程の調整をした。主として、Orlicz空間の解析をもとに、変動指数をもつOrlicz空間などの関数空間におけるソボレフ型定理を発展させていく研究などを行った。変動指数をもつ関数空間および距離空間上の関数空間に関する研究（水田、二村）、フラクタル境界をもつ領域の研究（相川）、非線形楕円型偏微分方程式の解の研究（小野）を分担して行った。

平成20年度は、研究代表者が、研究分担者が研究打ち合わせを行えるよう日程の調整をした。主として、変動指数をもつOrlicz-Morrey空間におけるソボレフ型定理に関する研究やソボレフ関数の境界挙動に関する研究などを行った。変動指数をもつMorrey空間におけるソボレフ型定理に関する研究（水田、二村）、フラクタル境界をもつ領域におけるソボレフ関数の境界挙動の研究（相川）、非線形ディリクレ問題の研究（小野）を分担して行った。

4. 研究成果

(1) 変動指数をもつMorrey空間においてHardy-Littlewoodの極大関数の有界性を示した。その応用として、Hedbergの方法を用いることにより、ソボレフの不等式、Trudinger指数積分不等式に関する成果を得た。変動指数をもつMorrey空間に属する関数のリースポテンシャルの連続性についても結果を得た。これらの研究から、ソボレフ空間だけでなく、Morrey空間の解析の重要性を再認識するとともに、変動指数をもつOrlicz-Morrey空間などにおいてもソボレフ型定理を発展させられることが予想

される。

(2) 変動指数をもつOrlicz空間 $L^{p(\cdot)}$ (log $D^{q(\cdot)}$)においてHardy-Littlewoodの極大関数の有界性を示した。その応用として、Hedbergの方法を用いることで、 $L^{p(\cdot)}$ (log $D^{q(\cdot)}$)に属する関数のリースポテンシャルに対するソボレフの不等式に関する成果を得た。この場合において、ルベグポイントの理論やAdams-Hurri-Syrjänenによる"vanishing exponential integrability"と呼ばれる積分平均に関する連続性についても成果を得た。これらの研究から、ソボレフ空間だけでなく、Orlicz空間の解析の重要性を再認識するとともに、さらなる変動指数をもつOrlicz空間におけるソボレフ型定理の発展が期待される。

(3) 1に近づく変動指数をもつ $L^{p(x)}$ 空間における極大関数の可積分性に関するHästöや二村-水田の研究に続き、より一般的な変動指数をもつ $L^{p(x)}$ 空間における極大関数の可積分性を調べた。変動指数はある領域上で1に近づくので、結果は領域の形状や変動指数が1に近づく速さに依存する。領域の形状をMinkowski contentの概念を用いて設定し、変動指数 $p(\cdot)$ の条件を弱めることによる極大関数の可積分性への影響を考察した。

(4) 変動指数をもつ関数空間における不等式の研究を行い、最大値・最小値原理を満たす連続関数である単調関数の境界挙動について調べた。特に、変動指数をもつソボレフ空間に属する単調関数のリンデレーフ型定理を与えた。

(5) MorreyポテンシャルのTrudinger指数積分不等式を示したSerrinの結果の拡張

として、Morrey 空間 $L^{1,\nu,\beta}$ に属する関数のリースポテンシャルに対する Trudinger 指数積分不等式と連続性に関する結果を示した。

(6) 重調和関数は弾性学などの物理的問題ばかりでなく、調和解析などでも重要である。穴あき単位球で定義された優重調和関数について、球面平均の振る舞いによって、リースポテンシャルと重調和関数の和として表されることを示した。その応用として、原点の除去可能性を論じた。

(7) $C^{1,1}$ -領域と内部および外部球条件を満たすことが同値であることを示し、Green 関数の比較を用いて $C^{1,1}$ -領域における境界 Harnack 原理を証明した。任意の領域において大域的な境界 Harnack 原理が成立することと、大域的な Carleson 評価が成立することが同値であることを示した。John 領域において調和測度が強ダブリングであることと、領域が準一様であることが同値であることを示した。

(8) 距離空間上で p -Laplace 方程式型の 2 階楕円型非線形偏微分方程式に対応する変分式を考えたときの優解に相当する関数 (quasisuperminimizer) の収束、さらに、いつ変分式に対する優調和関数が優解に相当する関数になるかについて調べた。また、左辺が p -Laplace 作用素に低階項を加えたタイプで右辺に符号付 Radon 測度を含む 2 階楕円型非線形偏微分方程式の解と優調和関数の関係を示し、Wolff ポテンシャルによる優調和関数の上からの各点評価を与えた。その評価を使い、その方程式の解で entropy condition を満足するものが一意に決まることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 583-602. (査読有)
- ② Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Integrability of maximal functions for generalized Lebesgue spaces with variable exponent, Math. Nachr. **281** (2008), No. 3, 386-395. (査読有)
- ③ Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev's inequalities and vanishing integrability for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 70-85. (査読有)
- ④ Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, An elementary proof of Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces $L^{1,\nu,\beta}(G)$, Hiroshima Math. J. **38** (2008), 425-436. (査読有)
- ⑤ T. Futamura and T. Shimomura, Lindelöf theorems for monotone Sobolev functions with variable exponent, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **84** (2008), 25-28. (査読有)
- ⑥ T. Futamura, K. Kitaura, Y. Mizuta, Isolated singularities, growth of spherical means and Riesz decomposition for superbiharmonic functions, Hiroshima Math. J., Vol. 38, 2008, 231-241. (査読有)
- ⑦ H. Aikawa and K. Hirata, Doubling conditions for harmonic measure in John domains, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **58**, 2 (2008), 429-445. (査読有)
- ⑧ H. Aikawa, Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate, Math. Scand., **103**, 1 (2008), 61-76. (査読有)
- ⑨ T. Ono, Superharmonic functions and differential equations involving measures for quasilinear elliptic operators with lower order terms, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **33** (2008), 171-204. (査読有)
- ⑩ Y. Mizuta and T. Shimomura, Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Illinois J. Math. **51** (2007), 1039-1060. (査読有)
- ⑪ Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity

properties and vanishing exponential integrability of Riesz potentials of Orlicz functions, 京都大学数理解析研究所講究録, 1553 (2007), 137-148. (査読無)

- ⑫ H. Aikawa, T. Kilpeläinen, N. Shanmugalingam, and X. Zhong, Boundary Harnack principle for p -harmonic functions in smooth Euclidean domains, *Potential Anal.*, 26, 3 (2007), 281-301. (査読有)
- ⑬ T. Ono, A convergence property for quasiminimizers on metric measure spaces, 数理解析研究所講究録, 1553, 2007, 176-180. (査読無)

[学会発表] (計20件)

- ① 相川弘明, 複雑領域上の正調和関数, 日本数学会(企画特別講演), 東京大学, 2009年3月26-29日, 講演3月29日.
- ② 二村俊英, 変動指数をもつ関数空間におけるリースポテンシャルのハーディー型不等式, 日本数学会年会, 2009年3月28日, 東京大学.
- ③ 相川弘明, Boundary Harnack principle and the quasihyperbolic boundary condition, 京都大学数理解析研究所・共同研究集会「Potential Theory and related Fields」, 2009年2月16-19日, 講演2月18日.
- ④ 下村 哲, Integrability of maximal functions and Riesz potentials in Orlicz spaces of variable exponent, ポテンシャル論とその関連分野研究集会(京都大学数理解析研究所), 2009年2月17日.
- ⑤ 小野太幹, On solutions of quasilinear elliptic equations with general structure, ポテンシャル論とその関連分野, 2009年2月16日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑥ 相川弘明, Beurling's minimum principle and the minimal thinness. 複素解析の発展とその応用, 桐生市市民文化センター, 2009年1月24日~25日. 講演1月24日.
- ⑦ 水田義弘, Continuity properties for Riesz potentials of Orlicz functions, IWPT in Tokyo, Gakusyuin University, December 18-20, 2008.
- ⑧ H. Aikawa, Continuity problem of the extremal length. International Workshop on Potential Theory 2008, Tokyo-Mejiro, Gakushuin University, December 17-20, (2008). Talk on December 17.
- ⑨ 水田義弘, Sobolev inequalities for

Orlicz spaces of two variable exponents, International Conference on Real and Complex Analysis in Sendai (2008), Tohoku University, December 4-6, 2008.

- ⑩ 相川弘明, Beurling's minimum principle and the minimal thinness. ポテンシャル論研究集会, 秋田大学カレッジプラザ, 2008年11月1日~3日. 講演11月2日
- ⑪ 下村 哲, Continuity properties for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, 日本数学会秋季総合分科会(東京工業大学), 2008年9月26日.
- ⑫ 相川弘明, Martin 境界, 境界 Harnack 原理と擬双曲距離. 第55回幾何学論シンポジウム, 弘前大学, 2008年8月22日~25日. 講演8月25日(招待講演)
- ⑬ 下村 哲, Sobolev's inequalities for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)} \log L^{q(\cdot)}$, FSDONA Workshop, Helsinki University, Finland, August 22, 2008.
- ⑭ 水田義弘, Boundedness of maximal functions in Lebesgue spaces of variable exponent, The 16th international conference on finite or infinite dimensional Analysis and applications, Dongguk University, July 28-August 1, 2008.
- ⑮ 相川弘明, 半一様領域と調和測度のダブリング性について. 第50回函数論シンポジウム, 桐生市市民文化センター, 2007年10月6日~8日. 講演10月7日(招待講演)
- ⑯ 下村 哲, ソボレフの定理について(特別講演), 日本数学会秋季総合分科会(東北大学), 2007年9月23日.
- ⑰ 水田義弘, Function spaces of variable exponent, Potential Theory and Stochastics, Albac, Romania, September 4-9, 2007.
- ⑱ 水田義弘, Lebesgue point theory for Riesz potentials of Orlicz functions, Linköpings, August 31, 2007.
- ⑲ 下村 哲, Boundedness of maximal operators of variable exponent and Sobolev's inequalities for Riesz potentials, Finland-Japan joint seminar, Helsinki University, Finland, August 27-29 (29に講演), 2007.
- ⑳ 水田義弘, Isolated singularities for polyharmonic functions, Finland-Japan joint seminar, Helsinki, August 27-29, 2007.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)
広島大学・大学院教育学研究科・准教授
研究者番号：50294476

(2) 研究分担者

水田 義弘 (MIZUTA YOSHIHIRO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00093815

相川 弘明 (AIKAWA HIROAKI)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20137889

二村 俊英 (FUTAMURA TOSHIHIDE)
大同工業大学・教養部・講師
研究者番号：90387605

小野 太幹 (ONO TAKAYORI)
福山大学・人間文化学部・准教授
研究者番号：60289270

(3) 連携研究者