様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年４月９日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４０１８６
研究課題名（和文）　閉リーマン面上の特殊線形系

研究課題名（英文）　Special linear systems on compact Riemann surfaces

研究代表者
加藤　崇雄　（KATO　TAKAO）
山口大学　・名誉教授
研究者番号：１００１６１５７

研究成果の概要（和文）：閉リーマン面の研究における中心的課題のひとつである，その上の有理型函数の存在性および等角不変量を介してのリーマン面の分類問題，およびその一つの応用として符号理論に関する研究を行った．等角不変量としては，特に gonality, および，平面代数曲線として表現できる最小次数に関する成果を得た．符号理論に関しては代数幾何符号に関連して，適当な線形系についの Weierstrass n-tuple に関する成果を得た．

研究成果の概要（英文）：One of main themes of the study of compact Riemann surfaces is a classification problem of Riemann surfaces using the existence of meromorphic function on them and conformal invariants. We have studied this theme and the code theory as an application of it. For conformal invariants on Riemann surfaces, we have dealt with and gotten results on the gonality and the smallest degree of Riemann surfaces represented as a projective plane curve. For the coding theory, we study the algebraic geometric coding theory. We have gotten results concerning the Weierstrass n-tuple for suitable linear systems on Riemann surfaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２００８年度	900,000	270,000	1,170,000
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：　数学（函数論，代数幾何学）
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：閉リーマン面，代数曲線，gonality，bielliptic，hyperelliptic，誤り訂正符号理論

１．研究開始当初の背景
閉リーマン面の研究においてその上の有理型函数の存在性を介してのリーマン面の分類問題は中心的研究課題のひとつである．C を閉リーマン面，n,r を自然数とするとき $W_n^r(C)$ を C 上の次数 n, 次元 r の因子全体の Jacobi 多様体内の像とする．このとき，$W_n^r(C)$ の構造を解明することによってリーマン面の１つの分類が得られる．しかし，一般の n,r を与えたときにその構造を解明することは少なくとも現段階では殆ど不可能である．一方 C が超楕円的,

リーマン球の 3 葉の被覆，C の種数が小さい (g=3,4) 等ごく特殊な場合についてはよく知られている．

一方，1967 年に $\dim W^r_d(C) \le d-2r$ で，等号成立は C が超楕円的の場合に限るという，いわゆる次元定理が H. Martens によって示された．Mumford は $\dim W^r_d(C) = d-2r-1$ または $d-2r-2$ の場合に関する特徴付けを行った．しかし，種数 g のリーマン面 C がある面の 2 葉の被覆でない場合 $n < g$ ならば $\dim W^r_n(C) \le n-3r$ であることが Coppens–Keem–Martens (1992) によって得られていることに注目し，G. Martens は $\dim W^r_d(C) = d-3r$ になる場合について研究し，いくつかの例外を除けば gonality は 3 になることを示した．ここで，C の gonality とは C から射影直線 $\mathbb{P}^1$ への写像の最小次数をいう，これは等角不変量である．我々はこの研究の拡張として C が位数 2 の等角写像をもたないで，$d-3r-1 \le \dim W^r_d(C) \le d-3r$ となる場合にもいくつかの例外を除けば gonality は 3 または 4 になることを示した．ただし，それらの例外は Martens の場合に比してかなり複雑なものになるが．それらの全てを明確に記述することに成功した．さらに $\dim W^r_d(C) = d-3r-2$ となる場合についても調べた．この場合は様相は格段に複雑になり，いくつかの例外を除いては 5-gonal 以下になることは解明できたが，それらの例外が実際に存在するかどうかは依然未解決である．これらの研究は科研費（基盤研究 B (2) 平成 10–11 年度 「リーマン面上の有理型函数・Weierstrass 点の研究」，基盤研究C (2) 平成 12–13 年度 「閉リーマン面上の有理型函数の研究」，基盤研究C (2) 平成 15–16 年度 「閉リーマン面上の特殊線形系の研究」）の補助のもとで行われたことを申し添えておく．

(2) $W^r_d(C)$ をより具体的に研究するために，それに属する線形束のうち $\mathbb{P}^r$ への双有理射を与えるものを考え，そのような線形束が存在する最小の d を $s(C,r)$ と表す．もちろん，この量は等角不変量である．特に $r=2$ の場合には $s(C,2)$ は平面曲線として表現できる最小次数になる．簡単な考察によって，C の種数を g とするとき $(3+\sqrt{8g+1})/2 \le s(C,2) \le g+2$ であり，$s(C,2)=g+2$ になるのは C が hyperelliptic であるときに限り，$s(2) = (3+\sqrt{8g+1})/2$ となるのは C が $s(C,2)$ 次の非特異平面曲線であるときに限ることが分かる．また，Brill-Noether 理論の帰結として Severi は一般の C に対しては $s(2) = [(2g+8)/3]$ であることを述べている（1921）．ここまでは古典的に知られている事実である．最近（2000 年以降），Coppens, Martens 達によって，$s(C,2)$ に関する詳細な研究が再開された．研究の方向は２通りある．

① $s(C,2)$ が比較的大きい場合の C の特徴づけ.

② C が k-gonal とするときの，k と $s(C,2)$ との関係.

最近の Coppens, Martens, Keem 達の研究によって，①については「$s(C,2)=g+1, g \ge 6$ ならば C は torus の２葉の被覆になる」，「$s(C,2)=g, g\ge 12$ ならば C はある閉 Riemann 面の被覆になる」，また，②については「C が trigonal ならば，$s(C,2)$ は Maroni 不変量によって決定される」などの結果が得られている．

(3) 重要な等角不変量として Weierstrass 点がある．この歴史は古く 19 世紀末にまで遡るが A. del Centina による綜合報告 “Weierstrass points and their impact in the study of algebraic curves: a historical account from the “Lückensatz” to the 1970s, Ann. Univ. Ferrara (2008) vol.54, pp.37–59” で 1970 年代までの歴史が 83 篇に及ぶ引用文献によって述べられると共にその報告の末尾に「1980 年以降の論文数はそれ以前 30 年間の論文数の 3 倍以上である」と結ばれている．特に最近はその拡張概念である Weierstrass n-tuple の符号理論への応用がなされている．

２．研究の目的

(1) 研究開始当初の背景 (1) で述べた，$\dim W^r_n(C) = n-3r-2$ の除外例についてその存在性を確認すし，存在する場合はその挙動（既約成分の個数など）を調べる．

(2) 研究開始当初の背景 (2) で述べた，先行研究を発展させることを目的とする．① については，様々な状況から “$s(C,2)=g, g\ge 10$ ならば C はある閉 Riemann 面の 2 葉の被覆になる” ことが予想される．この予想の成否につ

いて研究する．また，②については C が 4-gonal の場合について，$s(C,2)$ と Scrollar 不変量との関係について研究する．Maroni 不変量は一つの正整数であるが，4-gonal の場合には Scrollar 不変量は二つの正整数の組であるので，問題は複雑になる．従って，当面は g が小さい場合（g=8, 9 など）について，実験的な考察をする．

(3) Weierstrass 点について：

① C 上の n 個の点に対して Weierstrass 点の拡張概念である Weierstrass n-tuple という概念があるが，基盤研究C (2) 平成 17–18 年度 「リーマン面上の特殊線形系の研究」において，それらの n 点が非特異平面曲線上のの全変曲点にの場合の Weierstrass 空隙列（閉 Riemann 面上の Weierstrss 空隙列の自然な拡張で，$n=2$ の場合は Weierstrass pair という）について，いくつかの結果を得て，それらを符号理論に応用した．本研究では Weierstrass n-tuple をさらに一般化し「ある線形形に対する Weierstrass n-tuple」について同様の考察を試みる．

②Weierstrass 点は等角不変量であるから自己等角写像との関連を研究することは自然であり重要である．本研究では，特殊な空隙列をもつ Weierstrass 点，高次 Weierstrass 点と閉リーマン面上の自己等角写像との関連を研究する．

３．研究の方法

(1) 山口大学所属の分担者とは随時セミナーを行い，研究の進捗状況の発表及び情報交換を行う．

(3) 学外の分担者（本間，大渕）相互に訪問し研究打ち合わせを行う．

(4) その他，各分担者との日常の情報交換には電子メールを最大限に活用する．

(5) 毎年，関連する研究者と共催で研究集会を開催する．その際可能な限り海外の研究者も招聘する．

(6) 本研究に関連する複素解析学，代数幾何学の各種研究集会で成果を発表するとともに他研究者の成果を本研究に反映させる努力をする．

(7) 代表者もしくは分担者が複素解析学または代数幾何学関連の国際研究集会あるいは海外の学会で成果を発表する．

４．研究成果

(1) 研究目的 (2) で述べた，$s(C,2)$ について考察し，以下の諸定理を得た．全ての定理で C は種数 g の閉リーマン面とする．

定理 1. $s(C,2)=g+2-t$ $(t\geq 0)$ とする．このとき，もし $g\geq(t+1)(t+2)$ ならば C は種数 g' のリーマン面 C' の 2 重被覆になる．ここで，g' は $g'\leq t(t+1)$, $g\geq 2(g'+t+1)$ をみたす．さらに $g\geq 3t^2+4t-1$ ならば $g'\leq t$ が成り立つ．

定理 2. C が種数 $g'\geq 1$ の超楕円面の 2 葉被覆ならば，$s(C,2)\geq g-2g'+3$ が成り立つ．さらに g が偶数で $g\geq 4g'$ または g が奇数で $g\geq 6g'$ ならば $s(C,2)=g-2g'+3$ になる．

この定理の系として

系. $g=8$, $g=10$ または $g\geq 12$ で，C が種数 2 の面の 2 葉被覆ならば，$s(C,2)\geq g-1$ が成り立つ．

これらのことから，研究目的 (2) で述べた予想とは異なる，次の定理を得た．

定理 3. $g=10$ または $g\geq 12$ で，C が超楕円面でも，楕円面の 2 葉被覆でもなければ，$s(C,2)\geq g-1$ である．特に $s(C,2)=g$ となる面はない．

この結果はある意味で大方の予想を覆すものであり，海外でも評価が高くドイツの一流国際誌に掲載された．

(2) C が d 次の非特異平面曲線として表せ（このとき，種数 $g=(d-1)(d-2)/2$ になる），位数 n の自己等角写像 σ を持てば，σ の不動点は Weierstrass 点になり，その空隙列もある程度限定できる．そこで，$C'=C/\langle\sigma\rangle$ がどのようなリーマン面になり，σ の不動点に対応する C' 上の点がどのような点になるかを考察した．結果は，もし σ の $\mathbb{P}^2$ 内の行列表現の対角成分が $(1,1,\zeta)$ （ζ は 1 の原始 n 乗根）ならば $d\equiv 0$ または $1 \pmod n$ であり C' は $n+1$ 次射影空間 $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の有理錘面上にある Castelnuovo の意味での極値曲線であること，また逆も成り立つことが証明された．この結果は C' が良く知られた曲線で今後の研究につながる可能性が大いにあるものと評価され，国内の国際誌に掲載が決定している．

(3) 種数 g の閉リーマン面 C 上の点に対して Weierstrass 空隙列（これが，$\{1,\dots,g\}$ でない場合を Weierstrass 点という），n 個の点に対して Weierstrass n-tuple 空隙集合が定義されるが，この定義を一般化し，C 上の正因子 $\mathcal{V}$

に対し，それぞれ $\mathcal{V}$-Weierstrass 空隙列，$\mathcal{V}$-Weierstrass n-tuple 空隙集合と呼ばれるものが定義できる．ちなみに，通常の Weierstrass 空隙列，Weierstrass n-tuple 空隙集合は $\mathcal{V}$ が標準因子（C 上の微分形式の因子）の場合である．我々は，ドイツの国際誌に招待されて，$\mathcal{V}$-Weierstrass 空隙列，$\mathcal{V}$-Weierstrass n-tuple 空隙集合に関する綜合報告を著すとともに，$\mathcal{V}$-Weierstrass pair 空隙集合の元の個数 N に関する新たな結果を公表した．すなわち，$\dim \mathcal{V} = r$, $\deg \mathcal{V} = d$ とするとき，$N \leq (r+1)(r+4)/2 + (r+1)(d-r)$ であり，等号成立は C が超楕円的で，2 点 $P, Q \in C$ が C の（通常の意味の）Weierstrass 点であって $\mathcal{V} = |dP|$ かつ d は偶数で $d \leq 2g-1$ となる場合に限ることを証明した．

(4) 本研究の一つの応用として符号理論に関して以下の成果を得た．C を q 個の元からなる有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の $[n,k,d]_q$ 線型符号とする．ここで，n は符号長，k は次元，d は C の最小距離である．k, d, q を固定したときの n の下限の評価として Griesmer 限界がある．これを $g_q(k,d)$ とあらわす．本研究では $k=5$, $3q^4-4q^3-2q+1 \leq d \leq 3q^4-4q^3-q$ のときは n の最小値は $g_q(k,d)+1$ となることを示した．ちなみに，$d \geq 3q^4-4q^3-q+1$ ならば n の最小値は $g_q(k,d)$ になる．我々は以前に，n の最小値が $g_q(k,d)+1$ になる，他の範囲も求めた．今回の成果によって n の最小値が $g_q(k,d)+1$ になる全ての範囲が求められたことになる．この結果は符号理論・暗号理論の専門誌に掲載された．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 14 件）

① On Weierstrass semigroups and sets: a review with new results, C. Carvalho and T. Kato, Geom. Dedicata **139** (2009) 195–210.（査読有）

② Quotient curves of smooth plane curves with automorphisms, T. Harui, T. Kato, J. Komeda and A. Ohbuchi, to appear in Kodai Math. J. (掲載決定)（査読有）

③ The minimal degree of plane models of algebraic curves and double coverings, T. Harui, T. Kato and A. Ohbuchi, Geom. Dedicata **143** (2009) 181–192.（査読有）

④ On the minimum length of some linear codes of dimension 6, E.J. Cheon and Takao Kato, Bull. Korean Math. Soc., **45** (2008) 419–425.（査読有）

⑤ Nonexistence of a $[g_q(5,d),5,d]_q$ code for $3q^4-4q^3-2q+1 \leq d \leq 3q^4-4q^3-q$, E.J. Cheon, T. Kato and S.J. Kim, Discrete Math., **308** (2008) 3082–3089.（査読有）

⑥ Region of variability for close-to-convex functions, S. Ponnusamy, A, Vasudevarao, and H. Yanagihara, Complex Var. Elliptic Equ. **53** (2008) 709–716.（査読有）

⑦ Weierstrass points with first non-gap four on a double covering of a hyperelliptic curve II, Jiryo Komeda and Akira Ohbuchi, to appear in Serdica Math. J. (掲載決定)（査読有）

⑧ Codes from curves with total inflection points, C. Carvalho and T. Kato, Des. Codes Cryptogr., **45** (2007) 359–364.（査読有）

⑨ Once-holed tori embedded in Riemann surfaces, M. Masumoto, Math. Z., **257** (2007), 453–464.（査読有）

〔学会発表〕（計 16 件）

① Takao Kato, Bielliptic Weierstrass points, XVIII Latin American Algebra Colloquium, 2009 年 8 月 7 日，São Pedro, Brazil

② Akira Ohbuchi, On a 4-gonal curve of genus 9, XVIII Latin American Algebra Colloquium, 2009 年 8 月 3 日，São Pedro, Brazil

③ Masaaki Homma, On the number of points of plane curve over a finite field, XVIII Latin American Algebra Colloquium, 2009 年 8 月 3 日，São Pedro, Brazil

④ 加藤 崇雄, Bielliptic Weierstrass points, 代数幾何学講演会, 2009 年 7 月 2 日，埼玉大学

⑤ 大渕 朗，結節曲線の超楕円性について, Workshop on Galois points and related topics, 2009 年 6 月 7 日，神奈川大学富士見高原研修所

⑥ 加藤 崇雄, ある特殊な Weierstrass 空隙列について, Workshop on Galois points and related topics, 2009 年 6 月 6 日，神奈川大学富士見高原研修所

⑦ 本間 正明，Plane optimal curves and their Galois points, Workshop on Galois points and related topics, 2009 年 6 月 5 日，神奈川大学富士見高原研修所

〔図書〕（計 0 件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
○取得状況（計 0 件）
〔その他〕
なし
６．研究組織
(1) 研究代表者
加藤 崇雄 (KATO TAKAO)
山口大学・名誉教授
研究者番号：10016157
(2) 研究分担者
増本　誠（MASUMOTO MAKOTO）
山口大学・理工学研究科・教授
研究者番号：50173761
柳原　宏 (YANAGIHARA HIROSHI)
山口大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：30200538
本間 正明 (HOMMA MASAAKI)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号：80145523
大渕　朗 (OHBUCHI AKIRA)
徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・教授
研究者番号：10211111
柏木 芳美 (KASHIWAGI YOSHIMI)
山口大学・経済学部・教授
研究者番号：00152637
(3) 連携研究者
松野 好雅 (MATSUNO YOSHIMASA)
山口大学・理工学研究科・教授
研究者番号：30190490
渡邉 正 (WATANABE TADASHI)
山口大学・教育学部・教授
研究者番号：10107724