

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540187

研究課題名（和文） 把手をもつリーマン面の正則写像

研究課題名（英文） Holomorphic mappings of Riemann surfaces with handles

研究代表者

増本 誠 (MASUMOTO MAKOTO)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：50173761

研究成果の概要（和文）：リーマン面は、各点で角度を測ることができる面であり、穴をあけた浮き輪(把手)をいくつかと平面領域とを適当に貼り合わせて得られる面と同じ形をしている。使われた浮き輪の個数をそのリーマン面の種数という。種数1のリーマン面 R を、別の一般のリーマン面 S の中に、1対1正則に写すこと、すなわち、各点での角度が保たれるように埋め込むことを考える。いわば、 S の上に R の地図を描こうとしているのである。そのためには、 S に一定の「広さ」が必要であろう。本研究では、その広さを測る方法を考案し、平面函数論における古典的な結果であるケーベの四分の一定理に類似する定理を得た。

研究成果の概要（英文）：A Riemann surface is a surface at every point of which angles are defined. It is obtained from tori with holes together with a plane domain by identifying boundaries appropriately. The number of tori is called the genus of the Riemann surface. If you want to embed a Riemann surface R of genus one into a general Riemann surface S , that is, if you want to draw a map of R on S , then you will need some “space” on S . In the present research we introduce a method of measuring the space and establish a theorem analogous to the Koebe one-quarter theorem, a classical theorem in function theory on plane domains.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：複素解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：リーマン面，正則写像，等角写像

1. 研究開始当初の背景

リーマン面間の正則写像においては、ごくわずかな位相的または解析的条件を課すことが実は非常に強い制限をその正則写像や

リーマン面に設けたことになってしまう、という現象が見られる。この現象は、言い方を変えれば、与えられたリーマン面間には所要の条件を満たす正則写像が必ずしも存在し

ないことを意味する。そのような現象を広範かつ組織的に研究し、どのようなリーマン面の間に与えられた性質を持つ正則写像が存在するか、または存在しないか、リーマン面のモジュライ空間の上に描き出してみたいと考えたのが、この研究を始めた動機である。一般一意化定理によれば、把手を持たないリーマン面は、平面領域と等角同値である。ゆえに、把手の存在こそがリーマン面論を平面函数論から独立させている所以である。そこで、把手が正則写像に与える影響を考察してみようとするに至った。

2. 研究の目的

本研究の目的は、リーマン面から他のリーマン面の中への正則写像について、リーマン面の複素構造を決定する様々なモジュライや等角不変量と関連させつつ、複素解析学的手法を中心とする種々の方法で研究し、その結果をタイヒミュラー空間論など複素解析学の他の分野に応用することである。

3. 研究の方法

問題の性格とこれまでの歴史から考えて、閉リーマン面を扱う場合と開リーマン面を扱う場合とでは、ふさわしい手法に大きな隔たりがあるように思われる。そこで、閉リーマン面の正則写像を研究するグループと開リーマン面を研究するグループを設けた。いずれのグループでも複素解析学的手法が研究の中心を占めるが、それに加えて、前者では代数学的手法を、後者では実解析学的手法を試みた。さらに、多様な例を作って研究の進展に資するため、数値実験をするグループも設けた。

各自の研究成果やアイデアは、山口大学と広島大学で開催される研究会で発表され、検討された。また、国内外で開催される学会・研究集会にも積極的に参加して、成果を発表し、最新の情報を得よう努力した。とくに、2008年、にアメリカ合衆国で開催された第5回非線型解析学者世界会議において分科会“Nonlinear problems on Riemann surfaces (リーマン面上の非線型問題)”を主宰したことは、研究の進展に大いに役立った。

4. 研究成果

R をリーマン面とする。 R 上の単純閉曲線 a, b で幾何学的交点数 $a \times b$ が 1 に等しいものの組 $\chi = \{a, b\}$ を R の把手の印という。そして、組 (R, χ) を印付きリーマン面と呼ぶ。 (R', χ') を別の印付きリーマン面とし、 $\chi' = \{a', b'\}$ とする。 R から R' の中への正則写像 f による a, b の像がそれぞれ R' において a', b' と自由にホモトピックならば、 f を (R, χ) から (R', χ') の中への正則写像であるという。

種数 1 の閉リーマン面をトーラス、種数 1、境界成分の個数が 1 である開リーマン面を穴あきトーラスと呼ぶ。印付きトーラス、印付き穴あきトーラスの意味は明らかであろう。 $(T_1, \eta_1), (T_2, \eta_2)$ を印付き穴あきトーラスとすると、 (T_1, η_1) から (T_2, η_2) の中への等角写像が存在するならば、 $(T_1, \eta_1) \leq (T_2, \eta_2)$ と表す。 \leq は、印付き穴あきトーラス全体のなす空間 S において半順序を定義するが、全順序ではない。

さて、 (R_0, χ_0) を種数 1 の印付き開リーマン面とし、 $\chi_0 = \{a_0, b_0\}$ とする。 (R_0, χ_0) から印付きリーマン面 (R, χ) の中への等角写像 f が単純であるとは、 R_0 の基本群の f による像が、像曲線 $f(a_0), f(b_0)$ で生成されるときをいう。そして、 $S(R_0, \chi_0)$ を、条件

(R_0, χ_0) から印付きリーマン面 (R, χ) の中への単純な等角写像が存在すれば、 (T, η) から (R, χ) の中への等角写像も存在する

を満足する印付き穴あきトーラス (T, η) の全体とする。 (R_0, χ_0) の中に等角に埋め込まれる印付き穴あきトーラスはすべて $S(R_0, \chi_0)$ に属するので、 $S(R_0, \chi_0)$ は空ではない。次の定理は、本研究の主要な結果の一つである。

定理 1 集合 $S(R_0, \chi_0)$ は、必ず最大元をちょうど一つ持つ。

$S(R_0, \chi_0)$ は順序集合 (S, \leq) の部分集合であったことを思い出そう。この順序は全順序ではないので、最大元の存在は、まったく非自明である。

定理 1 は、 $S(R_0, \chi_0)$ の元 (T^*, η^*) で次の性質をもつものの存在を主張している。

- A) (T^*, η^*) は、 (R_0, χ_0) が単純かつ等角に埋め込まれる任意の印付きリーマン面の中に等角に埋め込まれる。
- B) (T^*, η^*) は上記の条件 A) を満たす印付き穴あきトーラスの中で最大である。

一方、単葉函数論における古典的定理であるケーベの四分の一定理は、次のように述べられることもできる。

- C) 中心 0 、半径 $1/4$ の開円板 Δ^* は、正規化条件 $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ を満たす単位円板上の任意の等角写像 f の像に含まれる。
- D) Δ^* は上記の条件 C) を満たす原点中心の開円板の中で最大である。

すると、定理 1 とケーベの四分の一定理との類似性が明らかになるであろう。

一方、両者には大きな違いがある。ケーベの四分の一定理では Δ^* は正規化された等角写像の像に含まれているが、定理 1 では $(T^*$

η^* が単純等角写像による (R_0, χ_0) の像に含まれていることまでは主張していない。しかし、単純等角写像による (R_0, χ_0) の像に含まれる印付き穴あきトーラスを見つける問題は、 (R_0, χ_0) 自身に等角に埋め込まれる印付き穴あきトーラスを見つける問題に他ならず、この問題の解は単純等角写像の性質を何ら反映しないであろう。これは別の興味ある問題なのである。この問題について、いくつかの結果を得たが、それを述べるには多くの予備的知識が必要なため、詳細は省略する。定理1を含む以上の結果は、ドイツの伝統ある著名な雑誌に掲載された(下記〔雑誌論文〕の第16論文)。

これまでに述べた結果はすべて1対1正則写像に関するものであった。従来から「1対1」という仮定を落とした場合に興味があったのだが、前述の研究の過程においてその端緒を得たので、それを報告したい。

一般の(種数が1とは限らない)印付きリーマン面 (R_0, χ_0) と印付き穴あきトーラス (T, η) が与えられたとき、 (T, η) から (R_0, χ_0) の中への正則写像が存在するための条件を考察する。 R_0 の適当な被覆リーマン面をとれば、初めから R_0 を穴あきトーラスと仮定しても一般性を失わないことが簡単に知られる。そこで、以下では、 (R_0, χ_0) を印付き穴あきトーラスとし、 $\chi_0 = \{a_0, b_0\}$ とする。これまでの研究から、穴あきトーラスの等角写像の理論において、非分離的な単純閉曲線の自由ホモトピー類の極値的長さが重要な役割を果たすことを知っている。そこで、 a_0 の自由ホモトピー類の極値的長さを $E[R_0, \chi_0]$ と表し、印付き穴あきトーラス (R_0, χ_0) の基本極値的長さと呼ぶ。 f を穴あきトーラス (T, η) から (R_0, χ_0) への正則写像とする。 f が単射ならば不等式 $E[T, \eta] \geq E[R_0, \chi_0]$ が成立するが、 f が単射でなければ $E[T, \eta] < E[R_0, \chi_0]$ となることもある。しかし、 (R_0, χ_0) を固定したとき、 $E[T, \eta]$ は下に有界であり、 $E[R_0, \chi_0]$ を用いて $E[T, \eta]$ の下からの評価を具体的に与えることに成功した。すなわち、次の定理が成立する。

定理2

$$E[T, \eta] \geq 2 E[R_0, \chi_0] / (5 E[R_0, \chi_0]^2 + 4)$$

この定理は、下記〔雑誌論文〕の第5論文に収録されている。定理2で与えられた評価式は精密ではないが、今後の研究に重要な示唆を与えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計17件)

① Takeshi Harui, Takao Kato and Akira

Ohbuchi, The minimal degree of plane models of algebraic curves and double coverings, *Geometriae Dedicata*, 第143巻, 2009年, pp.181–192, 査読有

② Yasushi Hataya, Decaying solution of the Navier-Stokes flow of infinite volume without surface tension, *Nonlinear Analysis*, 第71巻, 2009年, pp.e2535–e2539, 査読有

③ Yasushi Hataya, Decaying solution of the Navier-Stokes flow without surface tension, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 第49巻, 2009年, pp.691–717, 査読有

④ Makoto Masumoto, Conformal mappings of once-holed tori into Riemann surfaces of positive genus, *Proceedings of the 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, 2009年, pp.166–171, 査読有

⑤ Makoto Masumoto, Holomorphic mappings and basic extremal lengths of once-holed tori, *Nonlinear Analysis*, 第71巻, 2009年, pp.e1178–e1181, 査読有

⑥ S.Ponnusamy, A.Vasudevarao and Hiroshi Yanagihara, Region of variability for close-to-convex functions. II, *Applied Mathematics of Computation*, 第215巻, 2009年, pp.901–915, 査読有

⑦ Akira Yamada, Equality conditions for norm inequalities in Hilbert spaces, *Mathematical Inequalities & Applications*, 第12巻, 2009年, pp.377–390, 査読有

⑧ Ciero Carvalho and Takao Kato, On Weierstrass semigroups and sets: a review with new results, *Geometriae Dedicata*, 第139巻, 2008年, pp.195–210, 査読有

⑨ Eun Ju Cheon and Takao Kato, On the minimum length of some linear codes of dimension 6, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 第45巻, 2008年, pp.419–425, 査読有

⑩ Isao Kiuchi, Bounds for triple zeta functions, *Indagationes Mathematicae*, 第19巻, 2008年, pp.97–114, 査読有

⑪ S.Ponnusamy, A.Vasudevarao and Hiroshi Yanagihara, Region of variability for close-to-convex functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 第53巻, 2008年, pp.709–716, 査読有

⑫ S.Ponnusamy, A.Vasudevarao and Hiroshi Yanagihara, Region of varia-

bility of univalent functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is spirallike, Houston Journal of Mathematics, 第 34 卷, 2008 年, pp.1037–1048, 査読有

- ⑬ 山田 陽, 吹田予想に関する Blocki の結果の紹介, 数理解析研究所講究録, 第 1618 巻, 2008 年, pp.95–103, 査読無
- ⑭ Eun Ju Cheon, Takao Kato and Seon Jeong Kim, Nonexistence of a $[g_{q(5,d),5}, d]_q$ code for $3q^4 - 4q^3 - 2q + 1 \leq d \leq 3q^4 - 4q^3 - q$, Discrete Mathematics, 第 308 巻, 2008 年, pp.3082–3089, 査読有
- ⑮ Cicero Carvalho and Takao Kato, Codes from curves with total inflection points, Designs, Codes and Cryptography, 第 45 巻, 2007 年, pp.359–364, 査読有
- ⑯ Makoto Masumoto, Once-holed tori embedded in Riemann surfaces, Mathematische Zeitschrift, 第 257 巻, 2007 年, pp.453–464, 査読有
- ⑰ Masakazu Shiba, Univalence of a complex linear combination of two extremal parallel slit domains, Analysis, 2007 年, pp.301–310, 査読有

[学会発表] (計 24 件)

- ① 幡谷 泰史, ある自由境界の解の L^1 非有界性, 関数方程式セミナー, 2010 年 1 月 15 日, 九州大学
- ② 山田 陽, 齊藤の不等式と Opial の不等式, 第 18 回関数空間セミナー, 2009 年 12 月 24 日, 北海道大学
- ③ Yasushi Hataya, Incompatibility of initial and final data in a free boundary problem, 2009 International Workshop on Differential Equations and Their Applications, 2009 年 12 月 19 日, 台湾国立理論中心(南) 成功大学(台湾)
- ④ 柳原 宏, Variability regions of analytic functions subordinated by convex functions, 第 52 回関数論シンポジウム, 2009 年 11 月 22 日, 大阪府立大学
- ⑤ Hiroshi Yanagihara, Variability regions of analytic functions subordinated by convex functions, XV-th International Conference on Mathematics, Informatics and Related Fields, 2009 年 11 月 8 日, Conference Center Energetyk (ポーランド)
- ⑥ 山田 陽, 再生核と不等式, 複素解析の発展とその応用, 2009 年 1 月 24 日, 群馬県桐生市市民文化会館
- ⑦ Masakazu Shiba, Flows on a Riemann surface extendable beyond the ideal boundary and generalizations of the Poiseuille flow, International Workshop on Potential Theory 2008, 2008 年 12 月

18 日, 学習院大学

- ⑧ 幡谷 泰史, 無限体積を持つ自由表面流体の可積分性, 応用数学セミナー, 2008 年 10 月 4 日, 早稲田大学
- ⑨ 山田 陽, 等角不変量と楕円函数, 再生核の応用についての研究, 2008 年 9 月 11 日, 京都大学数理解析研究所
- ⑩ Yasushi Hataya, Non preserving property arising in a free boundary problem, 2008 年 9 月 8 日, Darmstadt 工科大学(ドイツ)
- ⑪ Yasushi Hataya, Non preserving property arising in a free boundary problem, Parabolic and Navier-Stokes Equations, 2008 年 9 月 4 日, Stefan Banach 国際数学センター(ドイツ)
- ⑫ Makoto Masumoto, Conformal mappings of noncompact Riemann surfaces of genus one, The 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2008 年 7 月 28 日, 東国大学校(大韓民国)
- ⑬ Yasushi Hataya, Decay properties of Navier-Stokes flow without surface tension effect, The Fifth World Congress of Nonlinear Analysts, 2008 年 7 月 8 日, Hyatt Grand Cypress Resort (アメリカ合衆国)
- ⑭ Makoto Masumoto, Holomorphic mappings of open Riemann surfaces of genus one, The Fifth World Congress of Nonlinear Analysts, 2008 年 7 月 8 日, Hyatt Grand Cypress Resort (アメリカ合衆国)
- ⑮ Masakazu Shiba, A generalization of Hagen-Poiseuille flow, The Fifth World Congress of Nonlinear Analysts, 2008 年 7 月 8 日, Hyatt Grand Cypress Resort (アメリカ合衆国)
- ⑯ Akira Yamada, Exactness of multiplicative Bergman kernels, The Fifth World Congress of Nonlinear Analysts, 2008 年 7 月 8 日, Hyatt Grand Cypress Resort (アメリカ合衆国)
- ⑰ 柴 雅和, Riemann 面の等角的埋め込みと一般化された Hagen-Poiseuille 流れ, 日本数学会 2008 年度年会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学
- ⑱ 木内 功, ゼータ関数の性質, 平成 19 年度日本数学会中国・四国支部例会, 2008 年 1 月 27 日, 山口大学
- ⑲ Makoto Masumoto, Once-holed tori embedded in Riemann surfaces, Conference on Riemann Surfaces and Discrete Groups, 2008 年 1 月 13 日, 岡山大学

- ⑳ Yasushi Hataya, Decaying solution of Navier-Stokes flow without surface tension, 2007 Taiwan-Japan Joint Workshop on Numerical Analysis and Scientific Computation, 2007年11月2日, 中央研究院数学研究所 (台湾)
21. 幡谷 泰史, Riemann 面の等角的埋め込みと Poiseuille 流れの一般化, 日本数学会 2007年度秋季総合分科会, 2007年9月23日, 東北大学
22. Yasushi Hataya, Decaying solution of Navier-Stokes flow without surface tension, 非線形解析セミナー, 2007年6月26日, 慶應義塾大学
23. Masakazu Shiba, Fortsetzungen einer Riemannschen Flaeche und eine Verallgemeinerung der Poiseuille- Stroemung, Analysis Kolloquium, 2007年6月8日, Leibniz 大学 (ドイツ)
24. Masakazu Shiba, Continuations of a Riemann surface and a generalization of the Poiseuille flow, Tag der Funktionentheorie, 2007年6月1日, Trier 大学 (ドイツ)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

増本 誠 (Masumoto, Makoto)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号 : 50173761

(2) 研究分担者

- ・柴 雅和 (Shiba, Masakazu)
広島大学・名誉教授
研究者番号 : 70025469
- ・山田 陽 (Yamada, Akira)
東京学芸大学・教育学部・教授
研究者番号 : 60126331
- ・幡谷 泰史 (Hataya, Yasushi)
山口大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号 : 20294621
- ・木内 功 (Kiuchi, Isao)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号 : 30271076

- ・加藤 崇雄 (Kato, Takao)
山口大学・名誉教授
研究者番号 : 10016157
- ・柳原 宏 (Yanagihara, Hiroshi)
山口大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号 : 30200538

(3) 連携研究者 なし