

平成 21 年 6 月 10 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540195

研究課題名（和文） シュレディンガー方程式の準古典解析

研究課題名（英文） Semi-classical Analysis of Schroedinger Equations

研究代表者

藤家 雪朗 (FUJIE SETSURO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・准教授

研究者番号：00238536

研究成果の概要：(1) 双曲型不動点の近傍での超局所解の構造を明らかにした。少し詳しく述べると、incoming な安定多様体から outgoing な安定多様体への超局所解の伝播の一意性および存在定理を証明し、さらに解の伝搬の様子をフーリエ積分作用素を用いて表現した。

(2) シュレディンガー作用素の、解析性を持たない島の中の井戸型ポテンシャルが生成するレゾナンスの準古典分布を計算し、解析性をもつポテンシャルの場合と同じ結果を得た。

(3) 偏微分方程式の国際研究集会、および若手育成のためのスクール「準古典解析入門講義」（A.Martinez 教授による講義ほか）を、それぞれイーグレ姫路、先端技術支援センターで開催した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2008年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学，大域解析学

キーワード：函数方程式，実解析学，複素解析学，関数解析，函数方程式の大域理論，力学系

1. 研究開始当初の背景

(1) 古典力学系に捕捉された軌道が存在するとき、対応するシュレディンガー作用素は、その系がもつエネルギーの複素近傍に、準古典パラメータ（プランク定数）が小さくなるとともに集積する固有値、またはレゾナンスが存在することが知られている。捕捉された軌道として、ホモクリニック軌道がただ一つ

ある場合に、それが生成するレゾナンスの準古典分布を決定するという問題は、一次元の場合にのみ、Ramond との共同研究で解かれており、多次元の場合は未解決であった。多次元の場合本質的なのは、不動点において超局所解がどのように伝搬するかを知ることであった。その研究をまず行った。

(2) 指数的に小さいトンネル効果を計算するためには、位置、あるいは運動量を複素に拡張して考えるのが自然で、そのためにポテンシャルに解析性を仮定するのが普通である。ところが、本来物理の問題であることから滑らかさだけで同じ結論が得られることが期待されていた。そのことを実証する研究として、解析的な場合に Helffer-Sjoestrnad が研究した、島の中の井戸が生成するレゾナンスの虚部を求める問題を、解析性の仮定をはずして試みた。

2. 研究の目的

(1) シュレディンガー作用素のポテンシャルのバリアトップに波が入射したとき、散乱波は入射波を用いてどのように記述できるかという問題を、準古典解析、すなわちプランク定数にあたるパラメータを小さなパラメータとした漸近解析で解明する。またこれを一般の擬微分作用素の双曲型不動点に一般化する。

(2) 島の中の井戸型ポテンシャルが生成するレゾナンスの虚部は、原子核の半減期の逆数である。この量の準古典漸近展開を、ポテンシャルの解析性を仮定せずに計算する。原子核の寿命、さらに本質的には量子トンネル効果に、ポテンシャル障壁の解析性と無限回微分可能性の違いが反映されるかどうかを調べるのが目的である。

3. 研究の方法

(1) 古典ハミルトニアン H の双曲型不動点の近傍では、incoming な安定多様体と outgoing な安定多様体が存在する。Incoming な安定多様体に与えられた超局所解を WKB 解の重ね合わせとして表現し、さらにこの WKB 解を時間依存シュレディンガー方程式の WKB 解の重ね合わせで書くことにより、不動点の近傍、ひいては outgoing な安定多様体にまで接続することができる。

(2) 島の境界上で、井戸からの距離が最短であるような点におけるトンネル効果、すなわち、島の中で指数的に減衰する WKB 解が、島から抜けたときに振動する解に変わる現象が本質的な問題となる。島の境界では WKB 解が発散するため、エアリ型の積分で表現する。すなわち運動量の関する WKB 解のフーリエ変換の形に表現する。この積分に停留位相法を適用すれば境界を超えた点での解の漸近展開、すなわち WKB 解が得られる。しかし、我々の相関数は解析性を持たず、

停留点が存在しない。そこで概解析拡張を用いて相関数を複素平面上に拡張することにより停留点を定義し、ポテンシャル障壁を超えた点での漸近展開の近似を計算する。また、この近似の誤差が十分小さく、解析的な場合と同じ漸近展開を与えることを、特異性の伝播の定理を用いて示す。

4. 研究成果

(1) バリアトップの複素近傍で、離散的な集合（これは実は、このバリアトップがポテンシャルの最大値である場合のレゾナンス）の小さな近傍を除けば、incoming な安定多様体に与えた超局所解は outgoing な安定多様体の超局所解を一意に決定し、その関係はフーリエ積分作用素を用いて記述することができることを示した。

この結果は、特異性の伝搬の定理としても、全く新しいタイプの定理であり、また解の接続の公式としても、一次元の Weber 型の公式を多次元に著しく一般化したものになっている。

(2) ポテンシャルに解析性を仮定しなくても、滑らか（無限回微分可能）であれば、レゾナンスの虚部は、解析的な場合と同じ漸近展開をもつことを示した。トンネル効果を解析性を使わずに議論した結果はおそらく初めてではないかと思う。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11件)

(1) S.Fujiie, J.-F.Bony, T.Ramond, M.Zerzeri: "Long time behavior of the Schroedinger group associated with a potential maximum" to be published in Mathematics Industry Lecture Note Series, (査読無し)

(2) S.Fujiie, J.-F.Bony, T.Ramond, M.Zerzeri: "Propagation of microlocal solutions through a hyperbolic fixed point" RIMS Kokyuroku Bessatsu, B10 p.1-32 (2008) (査読有り)

(3)S.Fujiie, C.Lasser, L.Nedelec: "Semiclassical resonances for a two-level Schroedinger operator with a conical intersection" to appear in Asymptotic Analysis, (査読有り)

(4) S.Fujiie, A.Lahmar-Benbernou, A.Martinez: "Semiclassical complex interactions at a non-analytic Turning point" to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu, (査読有り)

(5) S.Fujiie, J.-F.Bony, T.Ramond, M.Zerzeri: "Propagation of microlocal solutions through a Hyperbolic fixed point" to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu, (査読有り)

(6) T.Umeda, D.Wei,: Generalized eigenfunctions of relativistic Schrödinger operators in two dimensions. Electron. J. Differential Equations 2008, No. 143, 18 pp. 35J10 (査読有り)

(7) Y.Saitō, T.Umeda: The zero modes and zero resonances of massless Dirac operators. Hokkaido Math. J. 37 (2008), no. 2, 363-388 (査読有り).

(8) Y.Saitō, T.Umeda: The asymptotic limits of zero modes of massless Dirac operators. Lett. Math. Phys. 83 (2008), no. 1, 97-106 (査読有り)

(9) S.Fujiie, J.-F.Bony, T.Ramond, M.Zerzeri: "Microlocal Kernel of Pseudodifferential Operators at a Hyperbolic Fixed Point" Journal of Functional Analysis, 252-1, p.68-125 (2007)

(査読有り)

(10) C.Iwasaki: Symbolic calculus of pseudo-differential operators and curvature of manifolds. Modern trends in pseudo-differential operators, 51--66, Oper. Theory Adv. Appl., 172, Birkhäuser, Basel, 2007 (査読有り)

(11) M.Tajiri, T.Umeda: Representation formulas of the solutions to the Cauchy problems for first order systems. Osaka J. Math. 44 (2007), no. 1, 197--205 (査読有り)

[学会発表](計 1件)

藤家雪朗: 日本数学会函数方程式分科会「微分方程式の総合的研究」招待講演 "Spectral projection for barrier-top resonances and applications" 平成20年12月20日 京都大学理学部

[図書](計 0件)

[産業財産権]
出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

[その他]

6 . 研究組織

(1)研究代表者

藤家 雪朗 (FUJIIIE SETSURO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・准教授

研究者番号：00238536

(2)研究分担者

保城 寿彦 (HOSHIRO TOSHIHIKO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：40211544

榎田 登美男 (UMEDA TOMIO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：20160319

岩崎 千里 (IWASAKI CHISATO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：30028261

(3)連携研究者

土居 伸一 (DOI SHINICHI)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00243006