

平成 21年 3月 31日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540198

研究課題名 (和文) 特異積分と関数空間の研究

研究課題名 (英文) Study of singular integrals and function spaces

研究代表者

小森 康雄 (Komori Yasuo)

東海大学・開発工学部・准教授

70234903

研究成果の概要：一般化された特異積分作用素のハーディー空間上での有界性について研究を進め、コーシー積分作用素と n 次元のカルデロンの交換子作用素がハーディー空間から局所ハーディー空間への有界作用素であること、その結果が最良であることを示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：特異積分，ハーディー空間，BMO

1. 研究開始当初の背景

前年度までに1次元のカルデロンの交換子作用素の有界性は示せていたので、この作用素が出てきた背景にあるコーシー積分作用素の有界性の証明に挑戦した。コーシー積分作用素の積分核を形式的にテイラー展開したものがカルデロンの交換子作用素の積分核になるので、この考え方は妥当であると思われた。

証明のアイデアとしては、1次元のカルデロンの交換子作用素のときに有効であった「T1 定理」の代わりに「Tb 定理」を使えばよいであろうことは、今までの研究の中で感じていた。

2. 研究の目的

一般化された特異積分作用素（畳み込みの形でないもの）は応用上ひじょうに多くの例を含む作用素である。その L^p 有界性については詳しく研究されているがハーディー空間上での有界性については強い条件の下でしか結果が得られておらず、重要な作用素に応用することができなかった。

そこでまずハーディー空間上での有界性の理論を作り、応用することを考えた。

まず、コーシー積分作用素のハーディー空間上での有界性を証明する。

そしてこれが証明できた後には、この作用素は1次元の作用素であるので、 n 次元の作用素であり、応用上非常に重要な作用素であ

る電気二重層ポテンシャル作用素の有界性の証明に挑戦する。

その準備として n 次元のカルデロンの交換子作用素の有界性を調べる。

3. 研究の方法

代表者、研究連携者それぞれが個別のテーマで研究を進めるとともにお互いに密接に連携を取り合い研究を進めた。科研費の援助により行った研究集会は以下である。

2006年10月、実解析学シンポジウム、弘前大学

2006年12月、調和解析セミナー、大阪教育大学

2007年10月、実解析学シンポジウム、大阪教育大学

2007年12月、調和解析セミナー、草津セミナーハウス

2008年11月、実解析学シンポジウム、山口大学

2008年12月、調和解析セミナー、山形大学

4. 研究成果

コーシー積分作用素とは複素平面上の曲線に沿ったヒルベルト変換であり、実解析学、複素解析学の両方において重要な作用素である。この曲線を $z = x + ia(x)$ の形にグラフ表示 (媒介変数表示) したものが $C_a f(x) = \int f(y) / (x - y + i(a(x) - a(y))) dy$ の形の作用素になる。

関数 $a(x)$ がリプシッツ連続であれば作用素 C_a が1次元のハーディー空間から1次元の局所ハーディー空間への有界作用素であることを証明した。

前年度までに得られていたカルデロンの交換子作用素の有界性と比べて難しい点は、我々が既に得ていた「T1定理のハーディー空間版」をこの作用素には直接適用できない点である。積分核の形が複雑であるからである。そこで L^p 理論では知られていた「Tb定理」(T1定理の拡張版)のハーディー空間版を新たに作り、それをこの作用素に適用して、求める結果を得ることができた。

さらに関数 $a(x)$ のリプシッツ連続のオーダーとそれに対応するハーディー空間の指数の関係が最良であることを示した。具体的に言うと $a(x)$ が Lip_s の関数であれば $p \geq 1/(1+s)$ のとき $H^p(\mathbb{R}^1)$ から $h^p(\mathbb{R}^1)$ への有界作用素であることを示した。

前年度までの結果であるカルデロンの交換子作用素の有界性と合わせると1次元の

場合は目標としていた作用素の有界性がすべて証明できたことになる。

次の問題は n 次元の作用素の有界性であるが、大きな目標は電気二重層ポテンシャル作用素の有界性である。この作用素は電磁気学はもちろんのこと偏微分方程式の境界値問題とも関係する非常に重要な作用素である。

今回の研究ではその前段階の研究として、 n 次元のカルデロンの交換子作用素について研究した。これは1次元の場合のカルデロンの交換子作用素とコーシー積分作用素の対応が、 n 次元においては、 n 次元のカルデロンの交換子作用素と電気二重層ポテンシャル作用素に対応するので、1次元の場合にまずカルデロンの交換子作用素について調べてからコーシー積分作用素に挑戦した作戦が成功したので、 n 次元でもこの方法が適用できるのではと考えたからである。

n 次元の場合の困難な点は L^p 有界性を証明する場合に使えた rotation method が使えないことである。rotation method とは n 次元の問題を極座標表示することで1次元の問題に帰着する方法であるが、ハーディー空間の場合は「 n 次元のハーディー空間の属する関数の超平面による切り口が次元の低いハーディー空間に属する」という性質が成り立たないので使えない。

そこで直接ハーディー空間上での有界性を示すのではなく共役空間であるリプシッツ空間上での有界性に関する定理をまず作って、それと rotation method の組み合わせで n 次元のカルデロンの交換子作用素が $H^p(\mathbb{R}^n)$ から $h^p(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素であることを証明できた。

また派生する問題として、曲線に沿ったヒルベルト変換を、弧長ではなく、「もっと一般の測度上でのヒルベルト変換の有界性を考える」という nondoubling measure 空間の理論における重みの研究も進めた。

ルベーグ測度空間上では良く知られた Muckenhoupt の重みのクラス A_p がそのままではうまくいかないことを反例をもって示し、修正した A_p クラスを導入することによって、nondoubling measure 空間上でハーディー・リトルウッドの最大関数の重み付き L^p 有界性を証明することができた。

nondoubling measure 空間上での特異積分作用素の重み付き有界性の証明と、ハーディー空間の理論の構築は今後の課題となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

1. Yasuo Komori and Satoru Shirai, Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, Math. Nachrichten, vol. 282, 219-231 (2009) 査読あり
 2. Yasuo Komori, Cauchy integral operators on Hardy spaces, Hokkaido Math. J. vol. 37, 389-398 (2008) 査読あり
 3. Yasuo Komori, Calderon's commutator on $H^p(\mathbb{R}^n)$, International J. of Pure and Applied Math. Vol. 47, 225-234 (2008) 査読あり
 4. Eiichi Nakai, A generalization of Hardy spaces H^p by using atoms, Acta Mathematica Sinica, vol. 24, 1243-1268 (2008) 査読あり
 5. Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, An elementary proof of Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces $L^{1, \nu, \beta}(G)$, Hiroshima Mathematical Journal, vol. 38, 425-436 (2008) 査読あり
 6. Eiichi Nakai, Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function, Studia Mathematica, vol. 188, 193-221 (2008) 査読あり
 7. Izuki Mitsuo and Tachizawa Kazuya, Wavelet characterizations of weighted Herz spaces. Sci. Math. Jpn. Vol. 67, 353-363 (2008) 査読あり
 8. Norio Kikuchi, Eiichi Nakai, Naohito Tomita, Kozo Yabuta and Tsuyoshi Yoneda, Calderon-Zygmund operators on amalgam spaces and in the discrete case, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 335, 198-212 (2007) 査読あり
 9. Eiichi Nakai, Construction of an atomic decomposition for functions with compact support, J. of Math. Analysis and Applications, Vol. 313, 730-737 (2006) 査読あり
- [学会発表] (計 26 件)
1. 中井英一, Singular and fractional integral operators on predual of Campanato spaces, 日本数学会年会, 2009/3/26 東京大学
 2. 小森康雄, Real-variable methods in harmonic analysis, 発展方程式シンポジウム, 2009/3/11, 東海大学
 3. 小森康雄, Div-Curl lemma とその周辺, 調和解析セミナー, 2008/12/23, 山形大学
 4. 小森康雄, 松岡勝男, Some weak estimates for singular integral operators on Herz spaces, 実解析学シンポジウム 2008/11/8, 山口大学
 5. 中井英一, Singular integrals on generalized Hardy spaces, 実解析学シンポジウム, 2008/11/8, 山口大学
 6. Yasuo Komori, Pseudo-differential operators on Hardy spaces, Harmonic Analysis and its Applications, 2008/10/12, Tokyo Metropolitan Univ.
 7. Eiichi Nakai, A generalization of Hardy spaces by using atoms and fractional integrals, Harmonic Analysis and its Applications, 2008/10/10, Tokyo Metropolitan Univ.
 8. 水田義弘, 中井英一, 大野貴雄, 下村哲, Boundedness of fractional integral operators on Morrey spaces and Sobolev embeddings for generalized Riesz potentials, 日本数学会秋季総合分科会, 東京工業大学, 2008/9/24, 東京工業大学
 9. Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, An elementary proof of Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in L^1 Morrey spaces, The Eleventh Conference on Real and Complex Analysis (日韓共同実・複素解析セミナー), 2008/9/18, Hiroshima Univ.
 10. Eiichi Nakai, A generalization of Hardy spaces and fractional integrals, International Workshop on Interpolation Theory, Function Spaces and Related Topics, 2008/9/7, Toledo (Spain)
 11. Eiichi Nakai, A generalization of Hardy spaces by using atoms, International Workshop on Function Spaces and Applications, 2008/7/6, Freyburg/Unstrut (Germany)
 12. 中井英一, A generalization of Hardy spaces on spaces of homogeneous type, 研究集会「バナッハ空間及び関数空間論

- の最近の進展とその応用」2008/6/4, 京都大学 数理解析研究所
13. 小森康雄, Time-Frequency 解析, Dyadic 解析入門, 調和解析セミナー, 2007/12/23, 草津セミナーハウス
 14. 中井英一, H^p and Lip_α , 実解析学シンポジウム 2007/10/20, 大阪教育大学 天王寺キャンパス
 15. 中井英一, 一般化 Morrey-Campanato 空間の前相対空間, 日本数学会秋季総合分科会, 2007/9/21, 東北大学川内北キャンパス
 16. Eiichi Nakai, Preduals of generalized Morrey-Campanato spaces, Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 2007/9/2, Hokkaido Univ.
 17. Eiichi Nakai, Preduals of Morrey-Campanato spaces, 研究集会「バナッハ空間、関数空間及び不等式の研究とその応用 (Banach spaces, function spaces, inequalities and their applications)」2007/6/6, 京都大学 数理解析研究所
 18. 米田 剛, 中井英一, $f'(x) = 4f(2x)$ の解の表示式の構造, 及びその数値計算について, 日本数学会年会, 2007/3/27 埼玉大学理学部
 19. Eiichi Nakai and Tsuyoshi Yoneda, Construction of solutions for the functional-differential equation $f'(\lambda x) = a f(x)$, $\lambda > 1$, Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo, 2007/3/24, Tokyo Woman's Christian Univ.
 20. 小森康雄, 松岡勝男, On the weighted Herz spaces and the boundedness for some sublinear operators, 調和解析セミナー, 2006/12/24, 大阪教育大学
 21. 大坪和弥, 倉坪茂彦, 中井英一, 特性関数における多変数フーリエ級数の各点収束について, 実解析学シンポジウム, 2006/10/28, 弘前大学理工学部
 22. 大坪和弥, 倉坪茂彦, 中井英一, 特性関数の多変数フーリエ級数におけるピンスキー現象について, 日本数学会秋季総合分科会, 2006/9/19, 大阪市立大学 杉本キャンパス
 23. 小森康雄, 白井悟, Weighted Morrey space and maximal operator, 日本数学会秋季総合分科会, 2006/9/19, 大阪市立大学 杉本キャンパス
 24. Eiichi Nakai, Singular integral operators on Orlicz-Morrey spaces, The Second International Symposium on BANACH and FUNCTION SPACES 2006/9/14, Kyushu Institute of Technology
 25. 小森康雄, Singular integral operators

- on $H^p(\mathbb{R}^n)$, 調和解析と非線形偏微分方程式 2006/7/7 京都大学数理解析研究所
26. 中井英一, On Orlicz-Morrey spaces, 研究集会「バナッハ空間及び関数空間の構造の研究」2006/6/7, 京都大学 数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小森 康雄 (東海大学・開発工学部・准教授) (70234903)

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

水原 昂廣 (山形大学・理学部・教授) (80006577)

中井 英一 (大阪教育大学・教育学部・教授) (60259900)

立澤 一哉 (北海道大学・理学研究院・准教授) (80227090)