

平成 21 年 6 月 4 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540201

研究課題名 (和文) 無限次元確率過程の構成的研究と量子情報解析への応用

研究課題名 (英文) Constructive research on infinite dimensional stochastic Processes and its applications to quantum information analysis

研究代表者

齊藤 公明 (SAITO KIMIAKI)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：90195983

研究成果の概要：

平成 19 年度、20 年度に上記補助金を受けさせて頂き、課題にある研究を遂行させて頂いた。本研究の目的は、確率論、解析学、グラフ理論、数論、計算機科学のそれぞれの専門分野から総合的に応用に適した無限次元確率解析を共同研究し、その立場からの量子化法、さらに量子情報解析として新しいアプローチを展開することにある。主に、無限次元ラプラシアン、特にレヴィ・ラプラシアン的一般化 (エキゾチック・ラプラシアンとよばれる) に基づいた無限次元確率解析およびその量子確率過程の構成法への応用において成果があがった。この作用素エキゾチック・ラプラシアンとグロスラプラシアンとの相似性の証明からこの作用素の生成する無限次元ブラウン運動の構成を行ない、成果は国際雑誌 IDAQP に掲載された。さらに、ホワイトノイズ超汎関数の空間は異なるオーダーをもつ無限個のエキゾチック・ラプラシアンを用いて分解できるという結果も得ることができた。エキゾチック・ラプラシアンはそれぞれ無限次元ブラウン運動に結合していることから、分解された空間一つ一つに異なる無限次元ブラウン運動が対応するという興味深い特徴づけができることになる。これらの成果と以前からの代表者の確率過程構成法との関連性の研究を進めている。また、抽象ウィナー空間上でこれらの結果を展開し始め、ルイジアナ州立大学の郭教授との共同研究を始めている。ローマ・トルヴェルガタ大学ヴォルテラ研究所のアカルディ教授とは、この成果を基に共同研究として、新しいホワイトノイズ理論構築を進めている。このように、ホワイトノイズ理論がスタイルを変え始め、付随した量子ホワイトノイズ理論も展開できることになり、この路線に沿った量子情報解析の構築が可能になったことが本課題の成果の意義のある点である。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，基礎解析学

キーワード：確率解析，無限次元解析，量子情報論

### 1. 研究開始当初の背景

汎関数解析、確率解析の進展はめざましく、ルートを異にした様々な分野から多くの研究が成されてきた。特に、日本、イタリア、ドイツ、米国などにおいて、それぞれ無限次元的な対象を取り扱おうとする特異な萌芽的研究が発展してきている。一方、量子力学と計算機科学の融合から量子コンピュータの研究が始められ、各国で研究プロジェクトも多く行われるようになってきた。更に、量子論と情報理論の融合から量子情報論なる新しい分野が発展してきている。

申請者齊藤はホワイトノイズを基に一つの無限次元解析を研究し続けている。この分野は日本で創始され、主に名古屋の研究グループ、海外ではドイツ、米国を中心に研究されてきた分野で、最近、量子確率論、分子生物学、経路積分法、情報理論、経済学等への応用の広さから、各界の研究者達から注目され、様々な方向に研究が展開され始め、アメリカ数学会の Mathematical Review から、60H40 : White Noise Theory なる登録番号を与えられ、国際的に一つの理論分野として認められるに至っている。ゆらぎを含んだ現象をホワイトノイズの観点から連続無限独立変数の汎関数とみなして、超汎関数の空間を構成し、その空間の解析を行なうものである。

齊藤は特に、ホワイトノイズ空間に働くある種の作用素を基に新しい確率解析として、無限次元解析を展開している。海外の共同研究者 Kuo 氏との共同で、特に、無限次元確率過程の構成方法における新しい展開を論文にまとめ、いくつかの成果を得ている。また、近年、イタリアのヴォルテラ研究所のアカルディ教授の率いる量子確率論のグループとの国際交流が盛んに行われ、極微の現象を記述する量子ホワイトノイズ理論へと急速に発展している。

### 2. 研究の目的

今回の研究の目的は、確率論、解析学、グラフ理論、数論、計算機科学のそれぞれの専門分野から総合的に応用に適した無限次元確率解析を共同研究し、その立場からの量子化法、さらに量子情報解析として新しいアプローチを展開することにある。ホワイトノイズ微分が量子計算論に応用できることが分かり、その展開をも行なう。特に、その微分

に関するレヴィ・ラプラシアンは、作用素解析の中でも特異な存在であり、超汎関数の空間にのみ実質上働く作用素である。このラプラシアンに関する Laplace 方程式と Yang-Mills 方程式が等価であることがわかり、このラプラシアンに基づいた無限次元解析を構築することは、場の理論の別の記述ができることであり、更に、量子情報論への展開が可能になる。この解析については今までの科研費研究において、かなりの成果は挙げてきて、基盤は整ってきている。このラプラシアンに基づいた無限次元確率解析の理論面の整備、およびその応用展開することが主な目的の一つとなる。具体的にこのラプラシアンを含む微分作用素によって生成される無限次元確率過程の構成的研究から、確率過程による量子化を通じ、量子情報解析を展開する。

### 3. 研究の方法

基本的に各年度とも研究計画は同じものとし、年度が進むに連れて研究内容も収束してゆくようにした。研究計画として、以下に挙げる項目を中心に実施した。

◆ 数学、物理、経済等関連分野のセミナーを開き、各界の研究者達との議論、共同研究を行なう。

◆ 他大学、関連機関等の研究者にレビューとしての講演を依頼する。

◆ 海外の研究者との共同研究。

◆ 関連の研究集会への参加及び研究発表。

◆ 計算機数式処理システムの充実と量子計算などの数理的実験。

ホワイトノイズを基にした確率解析を中心として、その関連のセミナー、研究集会を開催した。内容としては、

- (1) 無限次元確率解析、作用素解析関係
- (2) 偏微分方程式論、超関数論（特に、Yang-Mills 方程式に関する話題）
- (3) 量子計算論、量子情報解析関係
- (4) ファイナンス、数論などへの応用
- (5) 海外との共同研究

等としたが、これらの内容はすべてホワイトノイズを確率変数の素子と考えることにより、一貫した研究が展開された。ホワイトノイズ微分が消滅作用素、その共役作用素が生成作用素の役割を果し、量子ホワイトノイズ、量子ブラウン運動をこの無限次元確率解析の立場から記述することができるため、この立場から相互の関連を深めながら、研究集会

および共同研究を進めた。海外との共同研究は、主に、Kuo、齊藤により、量子情報解析としてのホワイトノイズ作用素解析を議論し、成果をまとめ、現在も引き続き継続している。また、Accardi、齊藤により、レヴィラブラシアン的一般化とそれに基づいたホワイトノイズ理論の新展開に関して議論し、成果をまとめ上げた。三町、齊藤、Kuoにより、符号力学系の量子エントロピーの研究を行い、現在引き続き継続して議論している。また、量子確率過程に関する標準表現の研究と新生過程の研究との関連性を議論し、成果をまとめている。

・予定招待者（レビュー依頼）：

2年間のうち、ローマ大学 Accardi 教授（イタリア）、ルイジアナ州立大学 Kuo 教授（米国）、に依頼した。

・計算機（設備）関係：

今回の研究においては、ホワイトノイズと汎関数微分方程式を考察することや、数理解、特に、量子化として、ファインマン経路積分の超関数論的計算法、確率過程量子化法、量子計算への応用、経済学（特にファイナンス）への応用も含み、量子情報解析としての無限次元確率解析、ホワイトノイズ理論の展開を行なうため、数値解析、数式処理、画像解析等計算機数学的手法も逐次利用して研究を実施した。

#### 4. 研究成果

(1) 無限次元ラブラシアン、特にレヴィ・ラブラシアン的一般化（エキゾチック・ラブラシアンとよばれる）に基づいた無限次元確率解析およびその量子確率過程の構成法への応用において成果があがった。この作用素エキゾチック・ラブラシアンとグロスラブラシアンとの相似性の証明からこの作用素の生成する無限次元ブラウン運動の構成を行ない、成果は国際雑誌 IDAQP に掲載された。（雑誌論文③）

(2) さらに、ホワイトノイズ超汎関数の空間は異なるオーダーをもつ無限個のエキゾチック・ラブラシアンを用いて分解できるという結果も得ることができた。エキゾチック・ラブラシアンはそれぞれ無限次元ブラウン運動に結合していることから、分解された空間一つ一つに異なる無限次元ブラウン運動が対応するという興味深い特徴づけができることになる。（部分的には雑誌論文③に掲載されたが、更なる発展を現在引き続きまとめている）

(3) ガウス型ノイズ汎関数の空間とポアソン型ノイズ汎関数の空間の間に一つの同型写

像を導入することにより、レヴィラブラシアンと個数作用素との関係式を得た。それにより無限次元フーリエ・メラー変換とレヴィラブラシアンの生成するユニタリ群との関係式を得ることが出来た。（雑誌論文①）

(4) (3)と関連して、ガウス型とポアソン型の汎関数の両者を含む空間上にレヴィラブラシアンの生成する（複素パラメータの）確率場を構成することが出来た。（雑誌論文①、⑥）

(5) (4)の成果は、更に一般レヴラブラシアン（エキゾチックラブラシアン）の場合に拡張される。この作用素は、ホワイトノイズの高階微分の汎関数に作用し、(4)の確率場を階数積分したもの一般レヴィラブラシアンの生成する確率場となることが期待される。この結果については、現在論文としてまとめている。

(6) 申請者のレヴィラブラシアンの生成する確率過程の構成法を量子レヴィラブラシアンに拡張し、その生成する量子確率過程を構成した。この成果は、量子エキゾチックラブラシアンの生成する量子確率過程構成に拡張される。これを基に量子情報解析が展開可能となる。（雑誌論文⑧）

(7) ファイナンスに現れる幾何ブラウン運動のある種の汎関数はホワイトノイズ理論の立場から考察することができ、ホワイトノイズ汎関数をホワイトノイズの2乗の汎関数に写す変換を導入することにより、グロスラブラシアン、ベルトラミラブラシアン、レヴィラブラシアン、ヴォルテララブラシアンについての4つの方程式で一意的に特徴付けられることがわかり、現在論文としてまとめている。この成果はファイナンスの無限次元解析としての研究の基盤となるものであり、他に類のない研究と思われる。

(8) 量子場におけるファインマン経路積分の計算法として、無限次元のブラウン運動を古典的なパスに加えることにより、ホワイトノイズ理論として計算する方法を考察し、ドリフト項にレヴィラブラシアンとヴォルテララブラシアンを含む無限次元シュレディンガー型方程式を得た。これは無限次元フーリエ・メラー変換と関連があり、この変換とある種のガウス-ポアソン対応を合わせると同類の無限次元シュレディンガー型方程式が得られる。一部の結果は雑誌論文①、⑤にまとめたが、更に検討を続けている。

(9) 微生物の運動モデルや各種の時系列データのモデル化を確率的に捉えるシステムを

完成させ、顕微鏡による観察、データ処理、画像解析を出来るように設備は整え、実際にデータ解析を行なっている。(7)における解析方法を数値解析として適用できるよう検討を続けている。また、三町により、報酬を伴うマルコフ連鎖の解析および最適政策の決定法のプログラム作成がなされた。(雑誌論文②)

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① K. Saitô, A Gauss-Poisson correspondence and the Lévy Laplacian, to appear in Interdisciplinary Information Sciences (2009) 査読有
- ② Y. Uchimura and Y. H. Mimachi: Analysis Of Markov chain with rewards by Z-transformation and the decision of its optimal policy, International J. of Pure and Applied Math., Vol.51, No.2, 277-291 (2009) 査読有
- ③ L. Accardi, U.C.Ji, K. Saitô, Exotic Laplacians and associated stochastic processes, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol.10, No.2, 1-19 (2008) 査読有
- ④ K. Saitô, A Gauss-Poisson correspondence and infinite dimensional Laplacians, Far East Journal of Mathematical Sciences, Vol. 31, 31-47, (2008) 査読有
- ⑤ K. Saitô, K. Sakabe, An infinite dimensional Fourier-Mehler transform and the Lévy Laplacian, QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis, Vol.22, 149-160 (2008) 査読有
- ⑥ K. Saitô, A.H. Tsoi: The Lévy Laplacian acting on some class of Lévy functionals, QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis Vol.20, 330-337 (2007) 査読有
- ⑦ U. C. Ji, K. Saitô, : A similarity between the Gross Laplacian and the Lévy Laplacian, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol.10, No.2, .261-276 (2007) 査読有
- ⑧ U.C. Ji, K. Saitô, H. Ouerdiane: Quantum stochastic process associated with Quantum Lévy Laplacian, Communications on Stochastic Analysis, Vol.1, No.2, 231-245 (2007) 査読有

[学会発表] (計 12 件)

- ① K. Saitô, Exotic Laplacians and exponential functions of white noise, The 8<sup>th</sup> Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Tohoku University (2008-11)
- ② K. Saitô, Exotic Laplacians and associated stochastic processes, Invited Lecture, Chungbuk National University, Korea (2008-9)
- ③ U.C.Ji, K. Saitô, Infinite dimensional stochastic processes associated with the Exotic Laplacians, 数理解析研究所講究録 No.1609, Non-Commutative Analysis and Micro-Macro Duality, pp.49-62 (2008-7)
- ④ K. Saitô, Exotic Laplacians and associated stochastic processes, Invited Lecture, Univ. Rome, Volterra Center, Italy (2008-4)
- ⑤ K. Saitô, A Gauss-Poisson correspondence and infinite dimensional Laplacians, AMS meetings, Invited Talk, Louisiana State University, USA, Abstract No.1037-60-226 (2008-3)
- ⑥ K. Saitô: Stochastic processes generated by the Exotic Laplacians, RIMS 研究集会「非可換解析とミクロ・マクロ双対性」, 京都大学数理解析研究所(2007-10)
- ⑦ K. Saitô: An infinite dimensional Fourier-Mehler transform and the Lévy Laplacian, Invited Lecture at National Chungbuk University, Korea (2007-9).
- ⑧ K. Saitô: Infinite dimensional Schrödinger equation associated with the Lévy and Volterra Laplacians, Invited Lecture at Dankook University, Korea (2007-9).
- ⑨ K. Saitô: Stochastic processes associated with the Exotic Laplacians, Invited Lecture at Hanyan University, Korea (2007-9).
- ⑩ K. Saitô: Exotic Laplacians and associated stochastic processes, 28<sup>th</sup> Conference on Quantum Probability and Related Topics, CIMAT, Mexico (2007-9).
- ⑪ K. Saitô: Recent developments on the Lévy Laplacian and related stochastic processes, The 6<sup>th</sup> Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability under the auspices of JSPS-KOSEF Joint Program, Tohoku University (2007-4)
- ⑫ K. Saitô: Kuo' s Fourier-Mehler transform and the Lévy Laplacian, AMS-MAA Joint Mathematics Meetings, New Orleans, Abstracts of papers presented to the American Mathematical Society Vol. 28, No.1, p.170 (2007-1).

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

特になし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

齊藤 公明 (SAITO KIMIAKI)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：90195983

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

松澤 忠人 (MATSUZAWA TADATO)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：20022618

尾畑 伸明 (OBATA NOBUAKI)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：10169360

日比野 雄嗣 (HIBINO YUJI)

佐賀大学・理工学部・准教授

研究者番号：50253589

三町 祐子 (MIMACHI YUKO)

名城大学・理工学部・助教

研究者番号：00218629

西 健次郎 (NISHI KENJIRO)

名城大学・理工学部・講師

研究者番号：30076616