

平成 22年 4月 20日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540206

研究課題名 (和文) エルゴード理論との相互関係に着目したフォンノイマン環の研究

研究課題名 (英文) Research on von Neumann algebras from a viewpoint of their close relation with ergodic theory

研究代表者

山ノ内 毅彦 (YAMANOUCHI TAKEHIKO)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：30241293

研究成果の概要 (和文)：本研究では、作用素環論で取り扱われるあるクラスのフォンノイマン環を、そのエルゴード理論との密接な関係に重点を置きながら解析を行なった。その結果として、作用素環論における余作用の研究が、エルゴード理論における1次コサイクルの研究と完全に一致することを明らかにした。また、エルゴード理論で既に確立された概念を本研究の解析を通して作用素環論の概念に焼き直すことで、作用素環という全く違った角度からの研究が可能になった。

研究成果の概要 (英文)：In this research, I studied a certain class of von Neumann algebras extensively treated in the area of operator algebras, with an emphasis on its close connection with ergodic theory. As a result, it has for the first time been revealed that the study of coactions in operator algebras is exactly the same as that of 1-cocycles in ergodic theory. Moreover, the analysis made in this research has enabled one to study a various kind of concepts already established in ergodic theory from a viewpoint of operator algebras. This opens an intriguing way of making a research on ergodic theory from a totally different angle.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：(1) フォンノイマン環 (2) エルゴード理論 (3) 測度付き同値関係 (4) 部分因子環 (5) コサイクル (6) 余作用 (7) ヘッケ環 (8) 数論

1. 研究開始当初の背景

作用素環論のエルゴード理論との密接な関係は、1930年代の von Neumann 自身による群-測度空間構成法による因子環の具体例の構

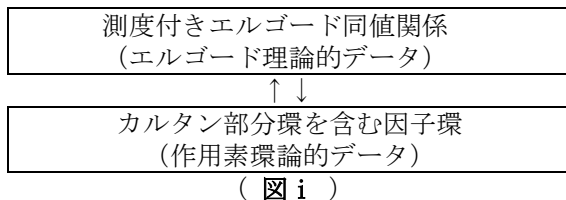
成に端を発する。その内容を簡潔に説明すると、可算離散群が測度空間に自由かつエルゴード的に作用しているとき、この設定から上で述べたエルゴード論的情報を含むようなフ

フォンノイマン環を構成する理論である。彼のこの画期的な研究以降は、あまりこの関係が大々的に取りあげられることはなかった。ところが、70年代における Connes、Krieger、Takesaki らの一連の研究がもたらした因子環の「Flow of weights」とエルゴード的流れの驚くべき対応の発見により、この相互関係は作用素環論における決定的な事実となる。その後、この関係に注目した作用素環論的研究は Feldman-Moore らによるカルタン部分環を持つフォンノイマン環の解析や、Jones による因子環の指数理論の創設と相俟って、Feldman-Sutherland-Zimmer らによる測度付きエルゴード同値関係とその部分同値関係の研究へと繋がった。しかし、本研究以前においては、この極めて興味深い作用素環論とエルゴード理論との相互関係が十分満足いく形で調べられてきたとは言い難かった。

2. 研究の目的

研究目的は大きく以下の2つ(1)、(2)に分けることができる。

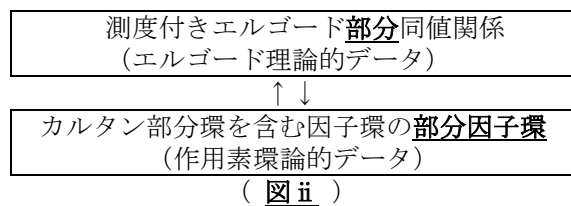
(1) 上の1で言及した群・測度空間構成法に登場するエルゴード理論的設定は、離散群の測度空間へのエルゴード的作用であった。この情報を Mackey 流に群作用軌道に重点を置いて記述したものが**測度付きエルゴード同値関係**と呼ばれるもので、これが本研究のエルゴード理論側の主要な考察対象となった。これに対応する作用素環論側の研究対象は、カルタン部分環と呼ばれる特別な部分環を含む因子環（フォンノイマン環）である。前出の Feldman-Moore 達の結果によれば、測度付きエルゴード同値関係が与えられると（つまりエルゴード理論的データが1つ与えられると）、これからカルタン部分環を含む因子環が構成される（つまり作用素環論的データが1つ得られる）。逆に、カルタン部分環を含む因子環が与えられると、そこから測度付きエルゴード同値関係が1つ構成されることがわかっている。要約すると、エルゴード理論的データと作用素環論的データという異なる2つの分野の情報を繋ぐ（橋渡しをする）以下のような対応が存在するという訳である：



本研究の目的の1つは、この有益な対応に着目することにより、作用素環、特に上に挙げたようなフォンノイマン環を、作用素環論の手法はもとよりエルゴード理論におけるアイデア・テクニックを最大限に利用して独自の

角度から解析し、その構造を明らかにすることであった。より具体的には、次のような内容の研究を遂行することをおおよその目標として挙げていた。

先に挙げた測度付きエルゴード同値関係は、その概念が導入された動機から、群の類似物として見なすことができる。従って、通常の群論で部分群の研究が重要なように、測度付きエルゴード同値関係に於いてもその「部分同値関係」の解析が不可欠となる。一方、左段で述べた「エルゴード理論的データ」と「作用素環論的データ」の対応 (図 i) において、部分同値関係に対応する作用素環論的データは部分フォンノイマン環（部分因子環）となる。つまり次のような対応（相互関係）がある：



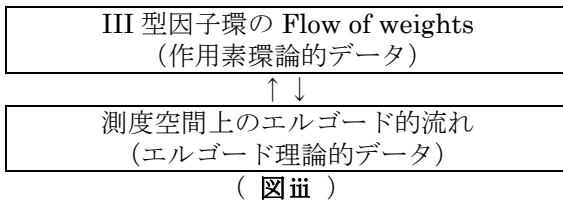
① 前出の Feldman-Sutherland-Moore 達は、測度付きエルゴード同値関係が群の類似物である、という観点から、群の正規部分群に相当する「**正規部分同値関係**」という概念を導入し、その測度論的（エルゴード論的）性質を調べた。一方、研究代表者は以前の研究に於いて、この部分同値関係の「正規性」が作用素環論的データとしてどのような概念（性質）に対応しているのかを調べ、一応の解決をみた。しかし、その議論にはまだ改善の余地が残されていたため、引き続きこの正規性について解析を行なう必要があった。このような理由から、本研究の目的の1つとして、この正規性の概念を作用素環論のレベルでさらに深く調べ上げ、その（作用素環的）意味を満足のいく形でより一層明白にすることを挙げていた。

② 群論において、正規部分群以外の部分群の研究も同時に大事であるように、測度付きエルゴード同値関係の研究に於いても正規部分同値関係以外の部分同値関係の研究が必要なことは容易に想像できる。その際、どのような部分同値関係が調べるに値するかは、その見方によって様々であるが、研究代表者は以前の研究において部分同値関係の「通約性」という概念を導入し、その性質の研究を開始した。これは、Izumi-Longo-Popa による因子環における部分因子環の「離散性」に相当する概念である。その意味で「通約性」という概念は、作用素環論的概念である「離散性」を上で示した 図 ii の相互関係を利用してエルゴード理論に「輸入」したものと考えることができる。上で言及した以前の研究では「通

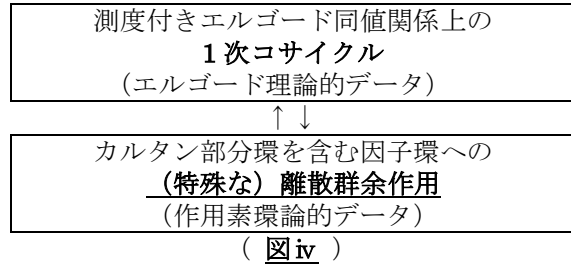
約性」を導入した程度に留まり、本格的な議論を深めることはできなかった。よって本研究の1つとして、この通約性をさらに深く理解し、そのエルゴード理論的意味を明らかにすることを挙げていた。

(2) (1)に続いて挙げた本研究の研究目的は以下の通りである。

1の「研究開始当初の背景」で述べたように、作用素環論とエルゴード理論との重要な相互関係として、Connes、Krieger、Takesakiらによる Flow of weights (作用素環論的データ) とエルゴード的流れ (エルゴード論的データ) の関手的関係がある。詳しく述べると、任意の III 型因子環が与えられたとき、決められた手順によってある可換フォンノイマン環上の 1 径数自己同型群 (Flow of weights) が構成される。ここで、一般論により可換フォンノイマン環上の 1 径数自己同型群は、ある測度空間上の 1 径数可測写像 (エルゴード理論における所謂「流れ」と呼ばれるもの) に対応することが知られているので、結局、上で述べた手順により、任意の III 型因子環から可測空間上の「流れ」が得られ、さらにこの流れはエルゴード的であることが示される。逆に、任意の可測空間上のエルゴード的流れが与えられると、その流れを「Flow of weights」に持つような III 型因子環を構成することができる。つまり以下のような相互関係が存在する：



ここで、(1)の冒頭で述べたように、測度付きエルゴード同値関係は離散群の測度空間への作用の研究とある意味で同等である。よって、離散群でない連続群の測度空間への作用の解析が測度付き同値関係研究の自然な延長として考えられる。このような視点からすれば、上述の (Flow of weights と) エルゴード的流れの研究は連続群の特別な場合であるところの実数群の作用の研究と見なすことができる。ところで、研究代表者は以前の研究に於いて、測度付き同値関係上の 1 次コサイクルの研究を実行し、1 次コサイクルが 図 i の対応のもとでは、カルタン部分環を含む因子環への (離散群の) 特殊な「余作用」に対応することを明らかにした。つまり 図 i の対応において、カルタン部分環を含む因子環への離散群の余作用 (作用素環論的データ) は 1 次コサイクル (エルゴード理論的データ) と密接な相互関係を持つ：



群作用に付随する 1 次コサイクルの研究は、エルゴード理論において最も基本的かつ重要な分野である。従って、上で述べた以前の研究 (図 iv) の自然な拡張として、連続群作用に付随する 1 次コサイクルの解析が考えられる。その最初のステップとして、連続群が実数群の場合の 1 次コサイクルの研究を行い、その性質を明らかにすることが本研究の目的の 1 つであった。これは、図 iii で言及した作用素環論との相互関係の視点からすれば、III 型因子環の Flow of weights に付随する 1 次コサイクルの研究を遂行することと同等である。

3. 研究の方法

「研究目的」の(1)で述べた研究に関しては、図 ii の相互関係を証明した青井氏 (現在立命館大学准教授) を研究分担者 (研究期間の後半では連携研究者) として加え、測度付きエルゴード同値関係のエルゴード部分同値関係について 図 ii の相互関係の観点から集中的に解析を行った。青井氏とは特に②で述べた部分同値関係の「通約性」について共同研究を行うという方法をとった。

「研究目的」の(2)で述べた研究に関しては、作用素環の 1 径数自己同型群研究の専門家である岸本氏 (現北海道大学教授) を研究分担者として加え研究を行った ((2)の研究にほぼ決着を見た研究期間後半では研究分担者から外れて頂いた)。

4. 研究成果

(1) 測度付きエルゴード同値関係におけるエルゴード部分同値関係の正規性について：以前の研究代表者の正規性に関する研究では、図 ii の相互関係を用いて、部分同値関係の正規性が作用素環論の範疇では何を意味するかを調べた。また、正規性と同値な様々な条件も導きだした。ところが、最終結果自身は作用素環の結果でありながら、その証明の手段には測度論的議論が主に用いられていたことには多いに不満が残った。今回の掲載済み論文では、正規性を作用素環論の枠組みの中だけで議論を収めることに成功し、主要結果の証明に用いる手法も作用素環の枠組みの中にとどめることができた。これにより正規性の作用素環論的性質が満足のいく形で明らかに

なった。

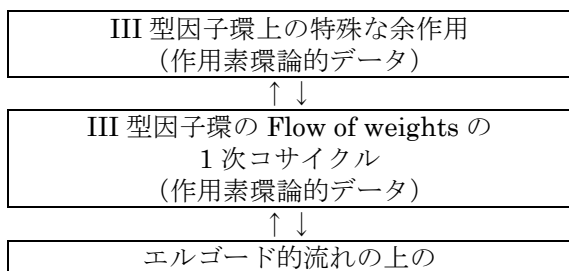
(2) 測度付きエルゴード同値関係におけるエルゴード部分同値関係の通約性について：今回掲載が決定した論文の中で以下のような結果を得ることができた。

① 測度付きエルゴード同値関係 R とそのエルゴード部分同値関係 S が与えられ、さらに (R, S) が通約的であるとする。このとき、 R, S から図 ii の相互関係を通して構成される因子環 A とその部分因子環 B に対し、 (A, B) から作られる Jones tower の相対可換子環たちが互いに双対関係にあることを明らかにすることができた。部分因子環理論では、Jones tower の相対可換子環たちは「観念的」には互いに双対関係にある対象として捉えられてきたが、本論文では相対可換子環たちを繋ぐ「フーリエ変換」を具体的に構成することにより、「観念的」ではなく現実に双対関係にあることを証明した。

② 相対可換子環に現れるフォンノイマン環は、数論における Hecke 環の一般化を与えていることを証明できた。具体的には、同値関係 R が群 G のエルゴード作用から構成されていて、さらに S が群 G の部分群 H の作用により実現されている場合、 (R, S) が通約的であることと、 (G, H) が数論の意味で Hecke pair になっていることが同値であることがわかった。さらに、相対可換子環に現れるフォンノイマン環がまさに (G, H) から構成される数論の意味での Hecke 環と同一のものであることを証明することができた。これらの結果は作用素環、エルゴード理論、数論という異なる分野の予想もしなかった結びつきを新たに提示したことで意義深い結果と言える。

(3) エルゴード的流れの 1 次コサイクルの研究について：

任意のエルゴード的流れ上の 1 次コサイクルが、そのエルゴード的流れを Flow of weights に持つ III 型因子環 N 上の群余作用を自然に誘導し、その余作用の不動点環は常に N 上のある dominant 荷重の中心可換子環を含むことを証明した。さらに、そのような性質をもつ群余作用は常に Flow of weights 上の 1 次コサイクルから上の手続きで構成されることを明らかにした。よって次のような相互関係が得られた：



1 次コサイクル
(エルゴード理論的データ)

また、この結果の応用として、従順局所コンパクト群の概有限次元 III 型因子環への可積分極小作用の分類が可能となった。さらに上のような作用のガロア対応を部分的に解決することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① H. AOI and T. YAMANOUCHI, Hecke von Neumann algebra of ergodic discrete measured equivalence relations, Publications of Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University 掲載決定 査読有。

② T. YAMANOUCHI, Normality for an inclusion of ergodic discrete measured equivalence relations in the von Neumann algebraic framework, Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 59, 2007, pp. 993-1009. 査読有。

③ T. YAMANOUCHI, One-cocycles on smooth flows of weights and extended modular coactions, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol. 27, 2007, pp. 285-318 査読有。

[その他]

ホームページ等

<http://www.freewebs.com/yamanouchi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山ノ内 毅彦 (YAMANOUCHI TAKEHIKO)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：30241293

(2) 研究分担者

平成 19 年度
岸本 晶孝 (KISHIMOTO AKITAKA)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：00128597
青井 久 (AOI HISASHI)
立命館大学・理工学部・准教授
研究者番号：90396276

(3) 連携研究者

平成 20-21 年度
岸本 晶孝 (KISHIMOTO AKITAKA)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：00128597
青井 久 (AOI HISASHI)
立命館大学・理工学部・准教授
研究者番号：90396276