様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21 年　6 月　4 日現在

研究種目：基盤研究（ ）
研究期間：2007～2008
課題番号：19540213
研究課題名（和文）　量子曲面の非可換幾何学

研究課題名（英文）　Noncommutative Geometry of Quantum Surfaces

研究代表者
夏目　利一(Natsume Toshikazu)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：00125890

研究成果の概要：
量子曲面上で構成したディラック作用素がスペクトラル・トリプルを定める。スピノール・ラプラシアンの量子化版との差としてスカラー曲率の量子化版が得られる。２次元の特殊性により上記スカラー曲率の量子化版は断面曲率の量子化版である。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非可換幾何学、量子曲面、　量子断面曲率、スペクトラル・トリプル

１．研究開始当初の背景

1980 年代初め A. Connes は群作用の軌道空間、葉層構造の葉空間のような特異空間上の「連続関数の為す環」として適当な非可換 C＊環を用いる事を提唱した。古典的 Gelfand-Naimark の定理は可換 C＊環を調べることは位相空間を調べることと同義であることを主張している。Connes の提唱する非可換幾何学は非可換なC*環を仮想空間X上の連続関数環と考えることにより、C＊環を調べることにより仮想空間の幾何学を構築する。非可換幾何学は共通の枠組みの中に、古典的リーマン幾何学、あるいは離散群の双対空間といった非可換現象を取り込んでしまう。非可換幾何学の提唱以来、特に変形量子化との関連で、多くの非可換多様体が構成され、多くの興味深い結果が得られた。最もよく調べられたものが２次元非可換トーラスである。非可換トーラスをはじめ非可換多様体の多くは通常の(可換な)多様体の直接的な変形として得られたものであり、非可換多様体に関する結果もその多くは可換な場合に成立する性質のアナロジーとして得られた勿論、可換な多様体の直接的な変形ではない非可換多様体もも数多く知られているが、それらの性質は未だ十分調べられていなかった。以上の意味で非可換幾何学は未だその黎明期にあった。

2．研究の目的

　コンパクト・スピン多様体Mとその上の１階楕円型微分作用素(Dirac 作用素 D)の組をモデルとして Connes はスペクトル三つ組という概念を導入し非可換多様体を公理化した。可微分関数の為す＊代数に対応するAとそれが作用するヒルベルト空間HとDirac作用素に対応する非有界作用素Dがスペクトル三つ組を与えるデータである。この三つ組がある公理を満たす時非可換多様体だと考える。Dを用いて非可換多様体上の微分形式、体積要素等の道具が導入され「微分幾何学」が展開される。多くの知られている非可換多様体は通常の可換多様体を変形して得られるC＊環の稠密な部分代数を考察し、非有界作用素Dも通常のDiracから自然に得られるものである。出発点となる可換なC＊環が生成元と生成元の間の代数的な関係式で与えられ、生成元の間に非可換な関係を導入して非可換C＊環が構成される。典型的なものが非可換トーラスである。特にスピン束が自明なものがほとんどであり、自明でない場合でも２次元球面のように１点を除けば自明になるような場合に限られている。

　可換な多様体の直接的でない変形でない非可換多様体で幾何学を展開することが目的である。研究代表者はコペンハーゲン大学のR.ネストとの共同研究で、種数２以上の閉リーマン面の非可換化（量子曲面）を構成した。量子曲面の微分幾何的性質を調べることを目指した。

　ディラック作用素を構成し非可換多様体の性質を満たすことを示す。

　最終目標は先ず非可換多様体に対して曲率の概念を導入し、量子曲面が負曲率を持つことを示すこと、さらに曲率を“積分”することによりオイラー数を記述するガウス・ボンネの定理を証明することである。

　R.Nestとの予備的研究において、種数２以上の閉リーマン面の単位円束の解析的変形として非可換３次元多様体を構成した。この非可換３次元多様体は、閉リーマン面とその単位円束の間に適当な群作用を通して成立する性質を保つ形で構成された。この非可換３次元多様体がスペクトル三つ組となるかどうかは未だチェックされていない。この点も研究目的に数えられる。上記非可換３次元多様体上でアノソフ葉層の非可換版に相当するC＊環（非可換アノソフ葉層）を構成することも目標の一つである。

　非可換アノソフ葉層も、可換の場合と同様にトレースを持たないIII型の世界であることが予想される。次年度第二の目標はモジュラー自己同型群を介してサイクリック・コサイクルを構成し、葉に沿ったDirac作用素の指数との対合を計算することである。この際、可換な場合に用いられた漸近的擬微分作用素等の概念を非可換な世界で再構築する必要が生じることが予想される。最終目標は、上記葉に沿ったDirac作用素の指数とサイクリック・コサイクルとの対合により得られる量をDixmierトレースの言葉で解釈することである。そこの現れるものはGodbillon-Vey類の非可換化であると考えられ、その解析は非可換多様体に対して特性類をどのように捉えるかのヒントを与えてくれるものと期待される。

3．研究の方法

　研究目的達成の為には研究代表者の研究分野である作用素環論のみならず、数学の他の分野の協力が必要である。

　目標は量子曲面上でリーマン幾何学を展開することであり、そのための手段はコンヌにより導入されたスピン束に作用するディラック作用素をモデルとしたスペクトラル・トリプルの概念である。

　研究代表者がニューヨーク州立大学 C.L.オルセンとの共同研究で考察した非可換３次元球面上のディラック作用素をより深く解析することにより量子曲面上のディラック作用素を構成する。スペクトラル・トリプルの条件を満足することを示す。３次元球面の場合、座標を用いて Dirac 作用素を比較的簡単に記述できるが、種数が２以上の閉リーマン面の場合そのような簡便な記述がなく、それが非可換リーマン面に対してDirac作用素を構成しようとする際の困難さをもたらしている。したがって球面の場合を座標を用いない形で徹底的に解析することが必要となる。

　ディラック作用素と同時にスピノール・ラプラシアンの量子化版を構成する。この両者の差としてスカラー曲率の量子化版が得られる。２次元の特殊性から上記スカラー曲率の量子化版は断面曲率の量子化と考えられるがその幾何学的視点からの最解釈が必要となる。

　ディラック作用素から決まるディクシミエ・トレースで断面曲率を積分することによりガウス・ボンネの定理が得られる。

4．研究成果

　非可換３次元球面の場合、座標を用いて比較的簡単にディラック作用素を記述することができるが、量子曲面の場合デラック作用素の働くバンドルが非自明であることに加え大域的な座標が存在しないことにより、記述の困難さがあった。ディラック作用素の満たすべき条件からヒルベルト空間の完全正規直交基底を用いて記述することは可能であったが、それは幾何学的自然さを欠き研究目標である量子化曲率の構築には不十分で

あった。さらなる解析により幾何学的に満足できる形での記述を得たが、満たすべき条件をチェックする段階で技術的な困難さに直面した。この為ディラック作用素の構成に関して論文として取りまとめるには至っていない。

技術的困難さの克服を目指すと同時にディラック作用素の“候補”が条件を満たすとし、研究目標を目指した。ガウス・ボンネの定理は断面曲率に関するものである。リーマン計量に関連するもう一つの概念にスカラー曲率がある。これはリヒネロヴィッチの定理を通してディラック作用素に直接的に関係している。一般の次元ではこの２つの概念は一致しないが、２次元リーマン多様体では両者は一致している。ディラック作用素をＤとする時、スカラー曲率はＤ＊Ｄとスピノール・ラプラシアンとの差として記述される。したがって量子曲面に対して量子断面曲率を導入するためには、スピノール・ラプラシアンの量子版を構成する必要がある。この時幾何学的に自然な記述が望ましい。

スピノール・ラプラシアンもある程度幾何学的に自然な記述を得、Ｄ＊Ｄとの差として“曲率”を考えることができるが、これはあくまでスカラー曲率の量子化版であり、量子断面曲率として理解するためにはさらなる解析が必要である。

以上のようにディラック作用素の候補が実際に条件を満たすことの細部に渡るチェック、量子スカラー曲率の断面曲率の視点からの最解釈が未達成であり、残念ながら本研究の目標を達成することはできなかったが、今後もこの方向での研究は続ける予定である。

最終目標は達成できなかったが、副産物としてオルセンとの別の共同研究で得た非可換２次元球面に対して「ねじれスペクトラル・トリプル」を構成し、これを用いてテープリッツ作用素に関する指数定理の書き直しを得た。現在細部のチェックを行ないつつ纏めている段階である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　6　件）

(1) 足立俊明、A characterization of the homogeneous ruled real hypersurface in a complex hyperbolic space、Journal of the Mathematical Society of Japan, 315-325, 6(2009)、共著、査読あり

(2) 足立俊明、Extrinsic geodesics and hypersurface of type A in a complex projective space 、Tohoku Journal of Mathematics, 597-605, 60(2008), 共著、査読あり

(3) 足立俊明、A chracterization of isotropic immersions by extrinsic shapes of smooth curves, Differential Geometry and its Applications, 307-312, 26(2008)、共著、査読あり

(4) 足立俊明、Characterizations of hypersurfaces of type A2 in a complex projective space, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1-8, 77(2008)、共著、査読あり

(5) 足立俊明、Trajectories on geodesic spheres in a non-flat complex space form、journal of Geometry、1-29、2008、査読有り

(1) 森吉仁志、A secondary invariant of foliated spaces and type III factors、From Geometry to Quantum Mechanics、Progress in Mathematics, 252,、2007、査読有り

〔学会発表〕（計　2　件）

(1) 森吉仁志、The Atiyah-Spatodi-Singer index theorem in noncommutative geometry、International Workshop on Noncommutative Geometry and Physics 2009、February 21, 2009、Yokohama、Japan

(2) 森吉仁志、Twisted index theorem for type III factors、Analysis and Topoogy in Interaction、June 18, 2008, Cortona、Italy

〔図書〕（計 1 件）

(1) 夏目利一、森吉仁志、Operator Algebras and Geometry, アメリカ数学会、146 ページ、2008、査読有り

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0 件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

夏目 利一(NATSUME TOSHIKAZU)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：00125890

(2)研究分担者

足立 俊明(ADACHI TOSHIAKI)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：6019855

中村 美浩(NAKAMURA YOSHIHIRO)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：50155868

(3)連携研究者

森吉 仁志(MORIYOSHI HITOSHI)
慶應義塾大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：00239708