

平成 22 年 6 月 2 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540214

研究課題名 (和文) 作用素環と非可換解析学

研究課題名 (英文) Operator algebras and noncommutative analysis

研究代表者

泉 正己 (IZUMI MASAKI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80232362

研究成果の概要 (和文)：ユークリッド空間の一般化であるヒルベルト空間 H と、その上の作用素は、解析学や量子物理学において基本的な役割を果たす。ヒルベルト空間の有界線型作用素全体 $B(H)$ は、線型演算、積、共役演算に関して閉じており、作用素環と呼ばれるものの典型例である。本研究では、作用素環の構造の解析を行った。特に、 $B(H)$ の準同型からなる 1 パラメーター半群の構造を研究し、その分類不変量や新たな例の構成法を得た。

研究成果の概要 (英文)：Operators on a Hilbert space, a generalization of the Euclid space, play fundamental roles in analysis and quantum physics. The set of bounded operators $B(H)$ on a Hilbert space H is closed under linear operations, product, and conjugation, and it is a typical example of an operator algebra. In this research, I performed structure analysis of operator algebras. In particular, I studied the structure of a 1-parameter semigroup of endomorphisms of $B(H)$, and obtained new classification invariants and construction of new examples.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：作用素環論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環、半群、正準交換関係、正準反交換関係、Hardy 空間

1. 研究開始当初の背景

(1) $B(H)$ の単位元を保つ自己準同型からなる連続 1 パラメーター半群を E_0 - 半群と呼ぶ。 E_0 - 半群は、I 型、II 型、III 型に分類される。I 型 E_0 - 半群は 1980 年代に Arveson により完全に分類されたが、II 型や III 型の E_0

- 半群の研究は始まったばかりと言える状態であり、中でも III 型 E_0 - 半群の構造は最も難解であった。1987 年の論文で、Powers は正準反交換関係の表現を用いて、最初の III 型 E_0 - 半群の例を構成したが、その後長い間それが唯一つの例であった。2003 年の論文

で、Tsirelson は off while noise を用いて非可算無限個の III 型 E_0 - 半群の例を構成した。その後 Bhat と Srinivasan は、sum system と呼ばれるものから正準交換関係を使って E_0 - 半群を構成する方法を考案し、Tsirelson の例の再構成に成功した。本研究の開始当初、これらの研究の包括的理解が専門家の間で求められていた。

(2) B(H) の部分作用素環で弱位相に関して閉じたものを von Neumann 環と呼び、ノルム位相に関して閉じたものを C^* - 環と呼ぶ。これらが作用素環論の主な研究対象である。中心が自明な von Neumann 環を因子環と呼ぶ。因子環は一般の von Neumann 環の構成要素であり、von Neumann 環の構造の研究は因子環の構造の研究に帰着される。1980 年代に始まった Jones の部分因子環の理論は、現在 Jones 多項式と呼ばれている結び目の新しい不変量をもたらすなど、広範囲の数学や数理論理学に影響を与えた。この分野での現在の興味の中心は、複数の部分因子環の関係の理解であり、綿谷と佐野は 1990 年代に部分因子環の間の角度の概念を導入してこの方面での先駆的な研究を行った。この問題は、最近の Jones と Grossman の論文でも再度取り上げられており、セクター理論などを用いた部分因子環理論の最新成果を使ったこの方面の研究が待たれていた。

(3) 1970 年代の Connes による整数群の従順 II_1 型因子環への作用の分類に端を発する、従順因子環への群作用の分類の研究は、多くの研究者の手により前世紀末までにほぼ完成した。現在では離散従順群の従順因子環への作用の完全なコサイクル共役不変量が知られている。一方、従順 C^* - 環への群作用の分類の研究は、最近ようやく始まったばかりである。その一つの理由は、従順 C^* - 環の分類理論自体が現在進行中であることであるが、もう一つの理由は、主に K - 理論に起因する C^* - 環特有の問題の困難さにある。実際、代表者は以前の研究で、従順 C^* - 環の中で最も単純な構造を持つ Cuntz 環 O_2 への位数 2 の巡回群の作用は、従順因子環への作用とは比較にならないほど多様であることを示している。研究開始当初までの、従順 C^* - 環への群作用の分類定理の中で、最も著しいものは、岸本晶孝による整数群の AT 環への作用の分類定理と中村秀樹による整数群の Kirchberg 環への分類定理であった。しかしその他の群の作用の分類に関しては、どのような分類定理が成り立つべきかについての予想さえも知られておらず、有効な分類不変量の存在も全く知られていなかった。

2. 研究の目的

(1)

①半直線上の二乗可積分関数からなるヒルベルト空間に作用する、ずらし半群の Hilbert - Schmidt 作用素による摂動理論を構築し、その生成作用素の右半平面の Hardy 空間に属する関数による完全な特徴付けを行う。

②Tsirelson の III 型 E_0 - 半群の構成法の、ずらし半群の摂動と正準交換関係による記述を行い、また Bhat と Srinivasan の構成との関係も明らかにする。これらを用いて、III 型 E_0 - 半群のコサイクル共役不変量である局所 von Neumann 環の、正準交換関係の表現による記述を行い、その von Neumann 環としての型を決定する。

③Powers による正準反交換関係の表現を使った E_0 - 半群の構成法の、古典解析的(あるいは作用素論的)視点からの研究を行い、そのようにして得られる E_0 - 半群(以後 Toeplitz CAR flow と呼ぶ)が I 型になる必要十分条件を与える。III 型 Toeplitz CAR flow の局所 von Neumann 環やそれに付随する分類不変量の計算を行う。

(2) 部分因子環のなす“交換しない四辺形”のセクター理論の視点からの研究を行い、その角度の制約や、部分因子環の 2 次コホモロジーとの関係を明らかにする。共型場理論から得られる部分因子環のモデルに対して、角度の明示的な公式を与える。Haagerup 部分因子環や浅枝 Haagerup 部分因子環などの散在的部分因子環の、部分因子環のなす“交換しない四角形”の観点からの特徴付けを行う。

(3) 整数群以外の群の Kirchberg 環への作用の新たな K -理論的不変量を導入し、その分類を行う。

3. 研究の方法

(1)

①半直線上の二乗可積分関数からなるヒルベルト空間に作用するずらし半群の生成作用素の定義域の、Laplace 変換や Hardy 空間を用いた複素解析的手法による特徴付けを行った。

②Sum system に付随する二つの C_0 - 半群の組の生成作用素の定義域の幾何学的関係を解析することにより、sum system には十分沢山のコサイクルが存在することを示した。このことにより、すべての sum system は Bhat と Srinivasan の意味で divisible であることを示した。

③Toeplitz 作用素や Hankel 作用素を用いた古典解析的な手法を使って、正準交換関係や正準反交換関係の表現の解析を行い、これらから得られる III 型 E_0 - 半群のコサイクル同型不変量の計算を行った。

(2) セクター理論によるテンソル圏的な方法を用いて、二つの部分因子環のなす角度と Jones 指数の関係を明らかにし、部分因子環のなす“交換しない四辺形”の分類を行った。

(3) Kasparov の KK - 理論、Kirchberg と Phillips による Kirchberg 環の分類理論、群作用における Rohlin の性質の理論などを使って、Kirchberg 環への外部的 Z^2 - 作用の分類を行った。

4. 研究成果

(1)

①半直線上の二乗可積分関数のなすヒルベルト空間に作用するずらし半群の、Hilbert - Schmidt 作用素によるある種の摂動の研究を行った。このような半群の生成作用素は一階の微分作用素であるが、摂動の結果その定義域は複雑になり、生成作用素はもはや歪対称作用素ではない。Laplace 変換のある種の一般化を用いて、生成作用素の定義域の右半平面の Hardy 空間に属する正則関数による完全な特徴付けを与えた。また、このようなずらし半群の摂動と正準交換関係の表現を用いて、Tsirelson の III 型 E_0 - 半群の例の再構成を行った。Tsirelson は、off white noise を使った確率論的な議論により III 型 E_0 - 半群の例を構成したが、作用素環論の研究者にとってその構成は難解であった。本研究の成果により、III 型 E_0 - 半群を研究するための新たな函数解析的手法を確立することができた。

②チェンナイ数学研究所の R. Srinivasan との共同研究で、Bhat と Srinivasan の sum system による E_0 - 半群の構成法と、①の構成法の間の一対一対応があることを示し、さらにこのようにして得られる E_0 - 半群が I 型になる必要十分条件を与えた。III 型 E_0 - 半群のコサイクル共役不変量である局所 von Neumann 環の型を、Toeplitz 作用素や Hankel 作用素を用いて計算することにより、Tsirelson の不変量では互いに区別できない非可算無限個の III 型 E_0 - 半群の例を構成した。これは、 E_0 - 半群の局所 von Neumann 環が計算された最初の例である。①②の成果について、トロントで開催された研究会で報告し、Arveson、Powers、Tsirelson などの専門家から称賛を受けた。

③Bhat と Srinivasan は、divisible という条件を満たす sum system から構成される E_0 - 半群は、常に I 型または III 型になるという、択一定理を示した。②の研究の結果として、sum system はヒルベルト空間に作用する二つの C_0 - 半群の組でその差が Hilbert - Schmidt 作用素になるものにより記述されることがわかる。これら二つの C_0 - 半群の生成

作用素の定義域の幾何学的な関係の解析を行うことにより、全ての sum system は十分沢山のコサイクルを持つことを示し、結果として divisible であることを示した。この結果についてオーベルヴォルファッハで開催された研究会で Bhat と議論を行ったが、彼には全く予想できなかった結果であったとのことである。

④Srinivasan との共同で、Powers による正準反交換関係の quasi-free 表現を使った III 型 E_0 - 半群の構成法の、Toeplitz 作用素や Hankel 作用素を使った古典解析的視点からの研究を行った。正準交換関係を使った上記の E_0 - 半群の構成法同様に、この構成法でも I 型または III 型の E_0 - 半群のみが得られるという択一定理が得られた。また Toeplitz CAR flow が I 型になる必要十分条件を、Toeplitz 作用素の表象に関する正則性の条件として与えた。局所 von Neumann 環と、Araki - Woods の導入した概念である complete Boolean Algebra of type I factors を使って、III 型 E_0 - 半群の新たな不変量を導入し、Toeplitz CAR flow についてその不変量を計算した。結果として、非可算無限個の III 型 Toeplitz CAR flow が存在することを示した。

(2) カリフォルニア大学バークレー校の大学院生であった Pinhas Grossman との共同で、部分因子環からなる“交換しない四辺形”の研究をセクター理論の観点から行った。まず、“交換しない”という条件から、“四辺形”を構成する部分因子環の指数に強い制約が現れることや、角度と部分因子環の 2 次コホモロジーとの間に強い関係が存在することを示した。因子環の推移性が高い場合の“交換しない四辺形”については、Jones と Grossman による分類定理があったが、上記の結果を使って、推移性のある程度弱めても分類定理がそのまま成り立つことを示す、短く簡単な証明が得られた。さらに、“交換しない四辺形”をなす部分因子環の指数が小さい場合の完全な分類定理を与え、その過程で新たなタイプの部分因子環の“四辺形”の構成を行った。また共型場理論や A 型因子環の漸近的包含関係関から得られる“交換しない四辺形”のモデルの S 行列を用いた角度公式を与えた。Haagerup 部分因子環や浅枝 - Haagerup 部分因子環は、代表的な散在型部分因子環であり、それらを自然な枠組みで捉えることは、最近の部分因子環理論の大きな懸案の一つであった。我々の分類理論では、推移性が 2 以上の部分因子環から構成される“交換しない四辺形”が四個のタイプに分類されるが、その中の二つのタイプにおいて最も推移性が高く最も指数が小さいものとして、これらの散在型部分因子環が現れること

は、特筆に値する。

(3) 千葉大学の松井宏樹との共同研究で、Kirchberg 環への群 Z^2 の外部的作用の分類を試みた。本研究で成功したのは、KK-理論的に局所自明な作用についてのみである。このような作用の分類不変量としては、大域的なもののみが考えられるが、実際に我々は Kasparov の KK^1 -群に値を取る不変量得た。Dadarlat の結果により、これは本質的に Kirchberg 環の自己同型群の基本群の元と同一視されるものであるが、それをファイバー束の障害理論の観点から解釈することが可能であることを、Sergey Neshveyev が指摘した。主結果の証明では、まず漸近的表現可能作用の概念を導入し、その同変 KK-理論に相当するものの特徴付けを行った。主定理以外の漸近的表現可能作用の応用として、最近専門家の注目を集めている強自己吸収的な Kirchberg 環上の、群 Z^n の外部的作用は、一意的であることを示した。ここで n は任意の自然数である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Masaki Izumi, R. Srinivasan, Toeplitz CAR flows and type I factorizations、査読あり、Kyoto Journal of Mathematics、Vol.50、no.1、2010、1-32、
- ② Masaki Izumi、Every sum system is divisible、Transactions of American Mathematical Society、査読あり、Vol.361、No.8、2009、4247-4267、
- ③ Masaki Izumi、R. Srinivasan、Generalized CCR flows、Communications in Mathematical Physics、査読あり、Vol.281、No.2、2008、529-571、
- ④ Pinhas Grossman、Masaki Izumi、Classification of noncommuting quadrilateral of factors、International Journal of Mathematics、査読あり、Vol.19、no.5、2008、557-643、
- ⑤ Masaki Izumi、A perturbation problem for the shift semigroup、Journal of functional analysis、査読あり、Vol.251、No.2、2007、498-545

[学会発表] (計 9 件)

- ① Masaki Izumi、Group actions on Kirchberg algebras、Asian mathematical conference、2009年6月23日、プトラワールドトレードセンター、クアラルンプール、マレーシア、
- ② Masaki Izumi、Generalized CCR flows、Mini-workshop “Product systems and independence in quantum dynamics”、2009

年2月18日、オーベルヴォルフアッハ数学研究所、オーベルヴォルフアッハ、ドイツ、

③ Masaki Izumi、Every sum system is divisible、作用素論作用素環論研究集会、2008年11月21日、大阪教育大学、

④ Masaki Izumi、Generalized CCR flows、Workshop “von Neumann algebras and ergodic theory of group actions”、2008年10月28日、オーベルヴォルフアッハ数学研究所、オーベルヴォルフアッハ、ドイツ、

⑤ Masaki Izumi、Classification of certain tensor categories、Operator algebras, Conformal field theory and related topics、2008年9月10日、シュレディンガー研究所、ウィーン、オーストリア、

⑥ Masaki Izumi、Group actions on Kirchberg algebras、First annual meeting of noncommutative geometry network、2008年6月18日、ダブリン上級研究所、ダブリン、アイルランド、

⑦ Masaki Izumi、Classification on Z^2 actions on the Kirchberg algebras、Workshop on Structure of C*-algebras、2007年11月14日、フィールズ研究所、トロント、カナダ、

⑧ Masaki Izumi、Quasi-free group actions on the Cuntz algebra O_∞ 、京大数理解析研究所研究集会、作用素環の新展開、2007年9月12日、

⑨ Masaki Izumi、Type III factors distinguish type III E_0 -semigroups、Workshop on noncommutative Dynamics and applications、2007年7月17日、フィールズ研究所、トロント、カナダ、

6. 研究組織

(1) 研究代表者

泉 正己 (IZUMI MASAKI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80232362

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：