様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年　3 月　1 日現在

機関番号：１７３０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００７～２００９
課題番号：１９５４０２１９
研究課題名（和文）　行列型パンルベ方程式の解の構造の研究

研究課題名（英文）　Study on the structure of solutions of Matrix Painleve Systems

研究代表者
　村田　嘉弘（MURATA YOSHIHIRO）
　長崎大学・経済学部・教授
　研究者番号：６０２１２２５５

研究成果の概要（和文）：
反自己双対ヤンミルズ方程式に対称性を仮定して得られる行列型パンルベ方程式の解の構造を調べる上で基本となる解の変換（ベックルント変換）について研究し，対応するパンルベ方程式の解の変換（岡本変換）のいくつかは時空上の共形変換とゲージ変換によって得られることを示した。

研究成果の概要（英文）：
Investigating transformations of solutions (Backlund transformations) of Matrix Painleve Systems reduced from Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations under symmetric conditions, we have shown that some transformations of solutions of Painlve equations (Okamoto transformations) are obtained from conformal transformations and Gauge transformations on space-time.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
１９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０年度	700,000	210,000	910.000
２１年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・大域解析学
キーワード：可積分系，パンルベ方程式，岡本変換，ヤンミルズ方程式

１．研究開始当初の背景
　パンルベ方程式を従来と全く異なる観点から統一的に研究するための手段として，2004 年度と 2005 年度の日本数学会秋季総合分科会無限可積分系セッションにて発表した行列型パンルベ方程式（Matrix Painleve

System）はグラスマン多様体上の反自己双対ヤンミルズ方程式を射影的ジョルダン群で退化させて得られる行列型の常微分方程式ですが，15 種類の型があり，それぞれがパンルベ方程式またはその退化系に同値です。この事実から行列型パンルベ方程式によりパンルベ方程式の退化現象が統一的に説明できるようになりました（2004 年秋に発表）。

また，パンルベ方程式の含むリッカチ方程式が行列型パンルベ方程式においては２連立の線型常微分方程式となり，それをグラスマン多様体上に引き上げた方程式が Generalized Confluent Hypergeometric System のグラスマン多様体上の表示式と同値になるということも明らかになりました（2005 年秋に発表）。

このように，行列型パンルベ方程式は，パンルベ方程式の従来の表示式や一般化と比べても，パンルベ方程式に関するより統一的な詳しい情報を得られる優れた方程式であると言えます。

一方，岡本和夫氏により発見されたパンルベ方程式の解の変換群（岡本変換群）は，パラメータ空間上のアフィンワイル群であり，パンルベ方程式の古典解・既約解を精密に研究する上でなくてはならない道具です。そのため，なぜパンルベ方程式がこのような解の変換群を持つのか，その起源を説明する試みも幾つか行われてきました。

２．研究の目的

行列型パンルベ方程式の解の構造に関し，行列型パンルベ方程式の解の変換群の構造を決定すること，及び，その結果と Penrose 変換（＝twistor 対応）を利用して行列型パンルベ方程式の解の表示について調べることを研究目標としました。

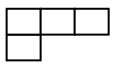
３．研究の方法

行列型パンルベ方程式の解の元となるゲージポテンシャルは，複素時空(グラスマン多様体)上で定義されているので，複素時空の自然な変換である共形変換とゲージ変換について詳細に調べ，その結果を利用して，行列型パンルベ方程式の解の変換（Backlund 変換）を決定しました。

４．研究成果

（主な成果）

λ を大きさ 4 のヤング図形とし，それにより定まる射影的ジョルダン群を PH_λ とする。例えば，

$\lambda=(3,1)=$ 

の場合

$$\mathrm{PH}_{(3,1)}=\{(\Lambda^0+a\Lambda+b\Lambda^2)\oplus[c]\}$$

（ただし，Λ は 3 次のシフト行列であり，$a,b,c\in\mathbf{C}$,$c\neq 0$）

となる。

またグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(2,4)$ のビッグセル

$$U=\{[I\ \ Z]\,|\,Z=(v,w,y,z)\in M(2,\mathbf{C})\}$$

への PH_λ の作用で不変な集合を U_λ とする。

（例） $\lambda=(3,1)$ の場合は

$$U_{(3,1)}=\{[I\ \ Z]\,|\,Z=(v,w,y,z),z\neq 0\}$$

（注意） $Z=(v,w,y,z)$ という行列表示は，v,w が 1 行目，y,z が 2 行目の成分を表すものとする。以下同じ表記方法で行列を表すものとする。

U は複素 4 次元時空とみなすことができ，U 上の $sl(2,\mathbf{C})$ ゲージポテンシャル

$$\Phi=\Phi_v dv+\Phi_w dw+\Phi_y dy+\Phi_z dz$$

に対する反自己双対ヤンミルズ方程式

$$\begin{aligned}&\partial_z\Phi_w-\partial_w\Phi_z+[\Phi_z,\Phi_w]=0,\\&\partial_v\Phi_y-\partial_y\Phi_v+[\Phi_v,\Phi_y]=0,\\&\partial_z\Phi_v-\partial_v\Phi_z-\partial_w\Phi_y+\partial_y\Phi_w\\&\qquad+[\Phi_z,\Phi_v]-[\Phi_w,\Phi_y]=0\end{aligned}$$

のうち，PH_λ の作用で不変な方程式は U_λ 上定義されていることになる。

4 次元時空に作用する自然な群は共形変換群であるが，U の共形変換群が $\mathrm{PGL}(4,\mathbf{C})$ になることは知られている（Mason-Woodhouse）。

まず，この共形変換群について以下のことが明らかになった。

定理１

(1) $\mathrm{PGL}(4,\mathbf{C})=<\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}>/Z$ ただし，$\mathrm{A}=(A^{-1},O,O,I),\mathrm{B}=(I,O,O,B)$, $\mathrm{C}=(I,\tau,O,I),\mathrm{D}=(I,O,\sigma,I)$（$A,B,\tau,\sigma$ は $M(2,\mathbf{C})$ の元で A,B は正則），Z は $\mathrm{GL}(4,\mathbf{C})$ の center とする。

(2) A は U への left semi rotation, B は U への right semi rotation, C は U への translation, D は U への inversion になる。

ここで，各共形変換は以下のようになっている。

(left semi transformation)

$$[I\ \ Z](A^{-1},O,O,I)=[A^{-1}\ \ Z]$$

$$A[A^{-1}\ \ Z]=[I\ \ AZ]$$

より，$Z\longmapsto AZ$

(right semi transformation)

$$[I\ \ Z](I,O,O,B)=[I\ \ ZB]$$

より，$Z\longmapsto ZB$

(translation)

$$[I\ \ Z](I,\tau,O,I)=[I\ \ Z+\tau]$$

より，$Z\longmapsto Z+\tau$

(inversion)

$$[I\ \ Z](I,O,\sigma,I)=[I+Z\sigma\ \ Z]$$

$$(I+Z\sigma)^{-1}[I+Z\sigma\ \ Z]=[I\ \ (I+Z\sigma)^{-1}Z]$$

より，$Z\longmapsto(I+Z\sigma)^{-1}Z$

行列型パンルベ方程式の Backlund 変換を考察するには，時空の座標の関数を成分とする共形変換を考える必要があり，その作用でU_λが不変になるかどうかについては，以下の結果が成り立つ。

$\boxed{\text{定理２}}$

$Z_\lambda=\{Z=(v,w,y,z)\in M(2,\mathbf{C})\mid [I\ Z]\in U_\lambda\}$

とし，$\wp$をポアンカレ群$\wp=<\mathrm{A,B,C}>/Z$とする。また，U_λの座標の関数を行列の成分とする作用

$$Z_\lambda\to\wp\times U_\lambda\to U_\lambda,$$
$$Z\longmapsto(g^{-1}(Z),[I\ Z])\longmapsto[I\ Z]g(Z)$$

を考える。ただし，$g(Z)$は$f_1(Z)$, $\exp f_2(Z),\log f_3(Z)$（$f_i(Z)$はZの成分の有理式）の有理式を成分とする2×2行列とする。このとき以下が成り立つ。

(1) U_λが left semi rotation で不変になるのは，Aが次のときである。

λ	A
$(1,1,1,1)$	$(a,0,0,d),(0,b,c,0)$
$(2,1,1),(2,2),(3,1)$	$(a,0,0,d),(a,b,0,d)$ $b\neq 0$
(4)	任意

(2) U_λが right semi rotation で不変になるのは，Bが次のときである。

λ	B
$(1,1,1,1),(2,1,1)$	$(a,0,0,d),(0,b,c,0)$
$(2,2)$	$(a,0,0,d),(a,b,0,d)$ $b\neq 0$
$(3,1)$	$(a,0,0,d),(a,0,c,d)$ $c\neq 0$
(4)	任意

(3) U_λが translation で不変になるのは，τが次のときである。

λ	τ
$(1,1,1,1),(2,1,1),(2,2)$	なし
$(3,1)$	$(a,b,c,0)$
(4)	任意

さて，PH_λの作用によるU_λの商空間をD_λとすると，

$$\begin{array}{ccc} U_\lambda & \longleftarrow & D_\lambda\times\mathbf{C}^3 \\ \downarrow & \swarrow & \\ D_\lambda & & \end{array}$$

（一意化写像）

という関係により，U_λ上のゲージポテンシャルΦは$D_\lambda\times\mathbf{C}^3$上のゲージポテンシャル

$$\hat{\Phi}=\mathrm{P}dp+\mathrm{Q}dq+\mathrm{R}dr$$

にうつる。ここで，$D_\lambda\times\mathbf{C}^3$の変数を$(t,(p,q,r))$とした。

ΦがPH_λ不変であることより，P,Q,R はD_λ上の関数となる。また，反自己双対ヤンミルズ方程式は，D_λ上の P,Q,R の常微分方程式となる。これが行列型パンルベ方程式M_λである。

尚，D_λはパンルベ方程式の定義域と完全に一致する。

（例）$\lambda=(3,1)$の場合は$D_{(3,1)}=\mathbf{C}$であり，対応するパンルベ方程式はパンルベⅣ型

行列型パンルベ方程式M_λとパンルベ方程式（正確には Painleve System）S_Jとは独立変数・従属変数の書き換えにより，以下の対応関係にある：

$$M_\lambda \Longleftrightarrow S_\mathrm{J}\ (\mathrm{J}=\mathrm{VI,V,III'})$$
$$M_\lambda \Longleftrightarrow N_\mathrm{J} \Longleftrightarrow S_\mathrm{J}\ (\mathrm{J}=\mathrm{IV,II})$$

方程式中のパラメータ数

４個　　４個　　１～４個

となっている。ただし，M_λは15種類ある行列型パンルベ方程式のうち5種類存在する非退化型の方程式（Pが非退化）である。また，N_Jは$\mathrm{J}=\mathrm{IV,II}$のときにのみ現れる2連立の多項式ハミルトン方程式で，S_Jとは正準変換で移りあう。ヤング図形との関係を示すと次表のようになる：

λ	パンルベ方程式	P
(1, 1, 1, 1)	VI 型	非退化
(2, 1, 1)	V 型	非退化
(3, 1)	VI 型	非退化
(2, 2)	III′ 型	非退化
(4)	II 型	非退化
(4)	I 型	零行列

定理２をもとに，各型のパンルベ方程式の岡本変換群に対応する行列型パンルベ方程式（Matrix Painleve System：MPS）の Backlund 変換を考察したところ，

> 岡本変換群の generator には，対応する MPS の Backlund 変換でU_λのポアンカレ変換とゲージ変換でかけるものがある。ただし，すべての generator がこのようにかけるわけではない。

との結果を得た。

例えば，$\lambda=(2,2)$のときを考える。MPS $M_{(2,2)}$はパンルベ III′ 型$S_{\mathrm{III'}}$と同値になり，その岡本変換群は$<(S_0)_*,(S_1)_*,(S_2)_*>$である。

$S_{\mathrm{III'}}$に含まれる本質的パラメータはθ_0,θ_∞であるが，$(S_0)_*,(S_1)_*,(S_2)_*$たちはパラメータ空間上の変換

$$S_0:(\theta_0,\theta_\infty)\longmapsto(-\theta_\infty-1,-\theta_0-1)$$
$$S_1:(\theta_0,\theta_\infty)\longmapsto(\theta_\infty,\theta_0)$$
$$S_2:(\theta_0,\theta_\infty)\longmapsto(\theta_0,-\theta_\infty)$$

に対応する$S_{\mathrm{III'}}$の解の変換である。つまり，$S_{\mathrm{III'}}$の Backlund 変換である。

一方，$M_{(2,2)}$の本質的パラメータはm,nであり，

$$\theta_0=2m,\quad \theta_\infty=2n$$

であるので，$M_{(2,2)}$ と $S_{\mathrm{III}'}$ の対応関係を通じて，$(S_0)_*,(S_1)_*,(S_2)_*$ に対応する $M_{(2,2)}$ の Backlund 変換が存在し，その変換より $(S_0)_*,(S_1)_*,(S_2)_*$ を再構成できるのではないかと期待されるが，実は以下の定理が成り立つ。

定理３
(1) $(S_1)_*,(S_2)_*$ は left semi rotation で実現できる。ただし次のようになる：

変換	A の形
$(S_1)_*$	$A=1/(y\exp(v/y))\cdot(1,-\log y-v/y,0,1)$
$(S_2)_*$	$A=(-1,0,0,1)$

(2) $(S_0)_*$ に対応する MPS $M_{(2,2)}$ の Backlund 変換は構成できない。

（成果の国内外における位置づけとインパクト）
ゲージポテンシャルの共形変換の中に，パンルベ方程式の解の変換を引き起こすものがあることは Mason-Woodhouse や Masuda により指摘されているが，体系的な考察はこの研究が最初である。

（今後の展望）
以下の各点について更なる検討が必要である。
①共形変換のうちポアンカレ変換にのみ注目したが，inversion まで考慮にいれたとき実現できる Backlund 変換が増えるのかどうかを明らかにする。
②岡本変換の generator に対応する MPS の Backlund 変換を構成できない理由は，ゲージポテンシャルの形に関する制限によるものであるが，この制限を緩めることが本当にできないのであるかどうかを明らかにする。
③MPS へのパラメータの入れ方自体が適切であるのかどうかを考察する。

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計１件）
村田嘉弘「パンルベ第６方程式の岡本変換群に対応する行列型パンルベ方程式のベックルント変換について」
2011 年度日本数学会年会,2011 年 3 月 23 日,早稲田大学理工学術院

６．研究組織
(1)研究代表者
村田　嘉弘（MURATA YOSHIHIRO）
長崎大学・経済学部・教授
研究者番号：６０２１２２５５

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：