

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540224

研究課題名 (和文)

球面上での非線形楕円型偏微分方程式の解構造の解明

研究課題名 (英文)

Investigation of the structure of solutions to nonlinear elliptic partial differential equations on a sphere

研究代表者

壁谷 喜継 (KABEYA YOSHITSUGU)

大阪府立大学・工学研究科・教授

研究者番号：70252757

研究代表者の専門分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：不完全分岐，球面上の微分方程式，楕円型偏微分方程式

### 1. 研究計画の概要

球面上の非線形楕円型偏微分方程式の解構造を解明することを目的としている。特に，球面上の領域がほとんど球面を覆う場合は，ユークリッド空間の領域とは異なる現象が起こることが分かっているが，その解構造の決定までには至っていない。解の構造について，領域を拡大して球面全体を覆う場合の解構造を解明することをこの研究期間に目指す。

### 2. 研究の進捗状況

(1) 本年度の研究では，昨年度中に得られた，「緯度」のみに依存する場合の非線形楕円型方程式の不完全分岐に関する成果をまとめ，査読付きの国際学術雑誌「Discrete and Continuous Dynamical Systems」に投稿し，出版社の都合で，査読付き姉妹紙である「Communications on Pure and Applied Analysis」に 2010 年度中の掲載が確定した。この成果は，球面上の領域を球面山体に広げるようにした場合の解の挙動について不完全分岐現象がどのように起こり，どのような分岐形状をしているかを解明したものである。この成果は，線形化固有値問題の固有値・固有関数の性質に深く関連することが分かった。この成果を踏まえて，「経度」にも依存する場合の考察を開始している。「緯度」のみに依存する場合は，固有値の多重性が常に 1 であるが，「経度」依存を加味すると，

固有値に多重性が現れ，しかも，領域がほとんど球面を覆う場合には，いくつかの固有値が互いに近いことが分かってきた。固有値が近いことで生じる困難さを解決すべく研究を進めている。

(2) また関連した話題として，ポテンシャル項のついた熱方程式の解の挙動についても研究し，ポテンシャルの減衰と解の最大点の関係を調べ，この成果は査読付きの学術雑誌「Advances in Differential Equations」に平成 21 年度に掲載された。熱方程式であるが，定常解である楕円型方程式の解の挙動が放物型方程式の時間大域的挙動を支配することを明確にした研究結果である。更に，ポテンシャル項の符号が正の場合，楕円型方程式に正值解が存在しない場合があるが，存在・非存在の「臨界」に相当する部分を，Hardy の不等式との関連から現在研究を進めており，初歩的な結果は，平成 21 年度の京都大学数理解析研究所研究集会で発表した。現在，投稿できるよう原稿を作成している。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

「緯度」のみに依存する関数のクラスに限定したが，基本的部分があるので，60%程度は研究目的が達成できたと考える。

この結果は，2に記載したように 2010 年度中に学術雑誌に印刷公表される見込みであ

る。

4. 今後の研究の推進方策

経度依存の関数のクラスでの解析を、変数分離形関数を近似関数としてリヤプノフ=シュミットの方法と縮小写像の原理を用いて解析を行い、経度依存も込めた解構造の解明を行う。また、大域構造の解明のために位相普遍量をうまく利用して解明を進める。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1. K. Ishige, Y. Kabeya

Hot spots for the heat equation with a rapidly decaying negative potential  
*Advances in Differential Equations*, **14**, 643-662 (2009) 査読あり。

2. C. Bandle, Y. Kabeya and H. Ninomiya,

Solutions having boundary layers to a nonlinear elliptic equation on a spherical cap,  
*京都大学数理解析研究所講究録*, **1588**, 74-86 (2008) 査読なし。

3. K. Ishige and Y. Kabeya

Large time behaviors of hot spots for the heat equation with a potential,  
*J. Differential Equations* **244**, 2934-2962 (2008) 査読あり。

4. K. Ishige, and Y. Kabeya,

Decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball,  
*Journal of the Mathematical Society of Japan*, **59**, 861—898 (2007) 査読あり。

5. Y. Kabeya

Perturbation of structures of radial solutions to elliptic equations,  
*Proceedings of the 14<sup>th</sup> MSJ International Research Institute "Asymptotics Analysis and Singularity"*, 589—600, (2007) 査読あり。

6. Y. Kabeya, and H. Ninomiya,

Fundamental properties of solutions to a scalar-field type equation on the unit sphere,  
*Proceedings of the Conference held at Hsinchu, Taiwan*, 147—150 (2007) 査読なし。

7. K. Ishige, and Y. Kabeya,

Decay rates of the derivative of the solutions to the heat equations and related topics,  
*数理解析研究所講究録*, **1528**, 12-35, (2007) 査読なし。

[学会発表] (計 6 件)

1. Y. Kabeya, K. Ishige

*Large behavior of hot spots to a linear heat equation with a decaying potential.*  
At 京都大学数理解析研究所研究集会 (Kyoto, Japan, 11 月, 2009)

2. Y. Kabeya, C. Bandle, H. Ninomiya

Nonlinear elliptic equations on a spherical domain and related topics.  
At 34th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations (Sapporo, Japan, 8 月, 2009)

3. Y. Kabeya, K. Ishige

*The behavior of hot spots to a linear heat equation with a potential.*  
At International Workshop on Nonlinear PDE and Applications at Pusan National University (Busan, Korea, 6 月, 2009)

4. Y. Kabeya, C. Bandle, H. Ninomiya

Bifurcation diagrams on a nonlinear elliptic problem on a spherical cap.  
At 6<sup>th</sup> International Conference on Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations (Gaeta, Italy, 5 月, 2009)

5. Y. Kabeya,

Imperfect bifurcations arising in a nonlinear elliptic problem on the unit sphere  
At Workshop on the stationary problems in the nonlinear partial differential equations (Kobe, 12 月, 2008)

6. Y. Kabeya,

*Imperfect bifurcations arising in a nonlinear elliptic equation on a spherical cap.*  
*Recent Advances on Nonlinear Parabolic and Elliptic Differential Equations (Ryukoku University, Otsu, Japan, 12 月, 2007)*