

機関番号：24403

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19540224

研究課題名 (和文) 球面上での非線形楕円型偏微分方程式の解構造の解明

研究課題名 (英文) Investigations on structures of the solutions to nonlinear elliptic partial differential equations on the sphere.

研究代表者

壁谷 喜継 (KABEYA YOSHITSUGU)

大阪府立大学・工学研究科・教授

研究者番号：70252757

研究成果の概要 (和文)：本研究期間において、球面上の領域がほぼ球面全体を覆う場合に非線形楕円型方程式の緯度のみに依存する解に関する不完全分岐が解明され、不完全分岐が漸近的にどのような形状であるかも解明できた。この成果は、国際学術雑誌“Discrete and Continuous Dynamical Systems”に掲載された。さらに、経度方向依存も考慮した不完全分岐については、研究期間終了間際となってしまったが、どのような構造をしているかが解明された。

また関連した話題として、ポテンシャル項のついた熱方程式の解の挙動についても研究し、楕円型方程式の解が時間大域的挙動を支配していることを明らかにした。

研究成果の概要 (英文)：In this research period, I investigated the imperfect bifurcations on azimuthal solutions to a nonlinear elliptic equation when the domain covers almost the whole sphere and showed how the structure of bifurcations asymptotically looked like. As for the cases including non-azimuthal solutions, I obtained some results just before the end of the term. Also, as a related topics, I studies the behavior of solutions to a heat equation with a potential and showed that the time global behavior was governed by solutions to the stationary problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
19年度	1,100,000	330,000	1,430,000
20年度	800,000	240,000	1,040,000
21年度	800,000	240,000	1,040,000
22年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：大域解析学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：分岐理論, 不完全分岐, 球面上の微分方程式, 楕円型偏微分方程式, ホットスポット

1. 研究開始当初の背景

本研究は、2004年12月に開催された日本・スイス二国間学術研究集会に参加し講演を行った際、スイス側参加者の C. Bandle 教授との議論を端緒としている。Bandle 教授は文献 [1] C. Bandle and R. Benguria, The Brezis-Nirenberg problem on S^3 , Journal of Differential Equations 178 (2002) において、Brezis-Nirenberg 方程式の球面上の領域での Dirichlet 問題を考察し、正值解のパラメータに関する存在範囲を示している。ユークリッド空間での領域に関するこの種の問題は、かなり解明されてきているが、球面上の領域に関してはまだまだ未解明のところが多く、Bandle 教授の論文が端緒であると思われる。その基本的な問題がこの論文で取り扱っているものといえる。この程度はユークリッド空間の問題の焼き直しに過ぎないものであるが、大域分岐の観点から [2] S. Stingelin, New numerical solutions for the Brezis-Nirenberg problem on S^n , Basel 大学学位論文 (2003) 【後、Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 63 (Birkhauser)に収録される】が数値計算ながら、その概要を明らかにしている。その大域構造は、補助金受給者が龍谷大学 (応募当時) の二宮助教授、兵庫大学森下助教授とともに解明した構造と非常に酷似している。球面上での楕円型偏微分方程式の解構造がユークリッド空間上のそれとどのように違うのかを解明することである。特に、球面上の領域を球面全体に広げていったときにどのような現象が起こるかを解明するものである。

これは、ユークリッド空間の問題を球面上に置き換えたという単純なものではなく、ユークリッド空間での問題との相違点の一部を既に発見しており、それをさらに掘り下げ、球面上の問題の本質と特性を解明しようとするものである。

2. 研究の目的

解明すべき課題は主に以下の5つである。

(1) 球面上での測地球での Dirichlet 問題の球対称正值解の構造と領域の球面全体へ近づけた場合の構造の変化

(2) 球面上の一般の領域での Dirichlet 問題の正值解の構造の解明

(3) 符号変化をする解を含めた Dirichlet 問題の構造の解明

(4) Neumann 問題を含めた第三種境界値問

題にした場合の構造の解明

(5) 以上を踏まえ、ユークリッド空間での問題との違いを明確にする
である。

まずは、(1) から順に取り組んでいくが、それぞれの項目に関して解明する目標は以下の通りである。

(1) に関しては、計算機による数値計算で得られた分岐図を数学的に確定し、その構造が領域を球面全体に広げていったときにどのように変化していくかを明らかにする。

(2) に関しては、(1)の結果を参考にしつつ、線形化固有値問題における解の球対称性のなさに注意して解明に当たる。

(3) に関しては、符号変化を伴うことによる困難があるが、分岐枝上での節の性質を利用しつつ、その構造を解明する。

(4) に関しては、Dirichlet 問題からの類推、並びにユークリッド空間での過去の研究を踏まえて、どのようなものになるかを解明する。なお、Neumann 問題においては、定数解が存在するため、球面とユークリッド空間との相違点は Dirichlet 問題ほど明確ではないと思われるので、研究の優先順位としては少し後回しにして、Dirichlet 問題を先に明確にすることを考えている。

これらが完成すれば、その帰結として(5)のユークリッド空間での問題との相違点と類似点が明確にできる。

3. 研究の方法

球面上の問題を、立体射影を用いてユークリッド空間の球の内部問題に写す。その際、球対称関数だけに限ると常微分方程式に帰着できるので、その常微分方程式をまず解明する。「研究目的」の欄で挙げた文献にある Stingelin 博士の数値計算を確認し、多くの場合を確認するために数値計算ようにワークステーション (SUN Ultra40) を購入して、数値計算を行う。また、数式処理ソフトウェアも購入し、効率よく数値計算ができるようにする。また、最近の研究動向を知っておく必要があるため、偏微分方程式関連図書と微分幾何学図書を50冊選び購入する。

さらに、国内の専門分野の近い研究者を訪問、あるいは招聘することにより、情報交換しながら研究の進展をはかる。

具体的には：

・スイスで開かれる ICAM2007 に参加し、参加予定の Bandle 教授と討論を行う。

- ・東北大学大学院理学研究科の柳田教授・高木教授・石毛助教授を訪問，あるいは招聘し，解の挙動について討論する．また，同研究科で開催されている微分方程式研究会に参加して講演する，もしくは講演者と討論する．
- ・早稲田大学理工学部の田中教授を訪問，あるいは招聘し，球面での変分問題について討論する．また，同学部で開かれている微分方程式研究会に参加して講演する，もしくは講演者と討論する．
- ・京都大学数理解析研究所での微分方程式に関する研究集会に年に数回出席して，講演者と討論し，知見を深める．
- ・京都大学，大阪大学で開かれる微分方程式関連セミナーに参加して，最新の研究動向を知るとともに講演者と討論するか，自ら講演する．
- ・京都大学大学院理学研究科の大鍛治助教授の主催する研究集会に参加し，自ら講演し，他の講演者と討論をする．
- ・九州大学大学院数理学研究院の中尾教授の主宰する研究集会に参加し自ら講演する，もしくは講演者と討論する．

を予定している．

平成20年度以降の計画：球面での常微分方程式の解構造を数値計算上確認した後，定数解に近い解の存在証明とその形状についての解明を行う．数値計算は，19年度に導入したワークステーションで行うので，以降の年度では必要ないが，各年度とも，最新の情報を得るため，偏微分方程式と微分幾何に関連した書籍を選び購入する．また，国内では，19年度同様に，訪問・あるいは招聘をすることにより情報交換，講演と討論を行い，研究目的で述べた（2）以降の課題の解明を行う．また，現時点では，国際研究集会の開催に関しては未確定であるが，微分方程式に関する国際研究集会において，途中の成果の報告を行う予定である．平成21年度以降は，特に符号変化する解を中心に検討するが，国内外の研究集会で講演を数回することを予定しており，最終年度は成果発表を中心に講演を行う．

4. 研究成果

まず，「緯度」のみに依存する場合の非線形楕円型方程式の不完全分岐の存在とその分岐形状に関する研究の成果が査読付きの国際学術雑誌「Discrete and Continuous Dynamical Systems」の2010年度号に掲載された．さらにこの成果を発展させて，「経度」方向依存も考慮した不完全分岐について取

り組んだ．残念ながら，研究期間終了間際となってしまったが，経度依存を込めた場合，どのような構造をしているかを解明することができた．現在は，その証明について細部を詰めているところである．緯度依存のみでない固有値と対応する固有関数の性質の解明から，多重度のある分岐解析が可能となり進展が見られたのである．年度が変わってしまうが，この成果は平成23年度中にも講演で公表し，国際学術雑誌に投稿する予定である．

また関連した話題として，負値のポテンシャル項のついた熱方程式の解の挙動についても研究し，3次元以上と2次元の場合の違いを明確にし，2次元の場合でのポテンシャルの減衰と解の最大点の関係が，査読付きの学術雑誌「Discrete and Continuous Dynamical Systems」に掲載された．更に，ポテンシャル項の符号が正の場合は，Schrodinger 半群との関連を明確に付け，Schrodinger 半群の意味での「劣臨界」と「臨界」の場合それぞれについて，解の時間大域的挙動の違いが楕円型方程式の解の遠方での挙動から遺伝することを解明し，平成23年度中に国際学術雑誌に投稿する予定である．

5. 主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計7件）

- ① K. Ishige, Y. Kabeya, Hot spots for the two dimensional heat equation with a rapidly decaying negative potential, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, 4, 2011, 833—849, 査読あり．
- ② K. Ishige, Y. Kabeya, Topics on the movement of hot spots for the heat equation with a potential, 京都大学数理解析研究所講究録, 1702, 2010, 71—87, 査読なし．
- ③ C. Bandle, Y. Kabeya, H. Ninomiya, Imperfect bifurcations in nonlinear elliptic equations on spherical caps, Communications on Pure and Applied Analysis, 9, 2010, 1189—1208, 査読あり．
- ④ K. Ishige and Y. Kabeya, Hot spots for the heat equation with a rapidly decaying negative potential, Advances in Differential Equations, 14, 2009, 643-662, 査読あり．
- ⑤ K. Ishige and Y. Kabeya, Large time behaviors of hot spots for the heat

equation with a potential, Journal of Differential Equations, 244, 2008, 2934—2962, 査読あり.

- ⑥ C. Bandle, Y. Kabeya and H. Ninomiya, Solutions having boundary layers to a nonlinear elliptic equation on a spherical cap, 京都大学数理解析研究所講究録 1588, 2008, 74—86, 査読なし.
- ⑦ Ishige and Y. Kabeya, Decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball, Journal of Mathematical Society of Japan, 59, 2007, 861—898, 査読あり.
- [学会発表] (計 10 件)
- ① 壁谷喜継, 逆二次で減衰する項を持つ線形熱方程式に対する解の減衰表と挙動, 別府解析セミナー, 2011年1月17日, 別府市.
- ② Y. Kabeya, Large time behavior of hot spots to a linear heat equation having a non-constant zeroth order term, 数理解析研究所研究集会, 2010年10月28日, 京都大学数理解析研究所.
- ③ 壁谷喜継, 逆二次で減衰する項を持つ線形熱方程式に対する解の最大値の挙動, 洞爺湖解析セミナー, 2010年9月27日, 洞爺湖.
- ④ Y. Kabeya, Large time behavior of hot spots to a linear heat equation having a non-constant zeroth order term, 第六回非線形現象の諸問題, 2010年9月18日, 山口大学
- ⑤ Y. Kabeya, Large time behaviors of hot spots to a heat equation with a potential term, 8th AIMS International Conference on Partial Differential Equations, 2010年5月22日, Dresden, Germany.
- ⑥ Y. Kabeya, Large behavior of hot spots to a linear heat equation with a decaying potential. 数理解析研究所研究集会, 2009年11月18日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑦ Y. Kabeya, Nonlinear elliptic equations on a spherical domain and related topics, 34th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 2009年8月24日, 北海道大学.
- ⑧ Y. Kabeya, Bifurcation diagrams on a nonlinear elliptic problem on a spherical cap, 6th International Conference on Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations,

2009年5月26日, Gaeta, Italy.

- ⑨ Y. Kabeya, Bifurcation diagrams for a nonlinear elliptic problem on a spherical cap, Workshop on Viscosity Solutions and Related Topics, 埼玉大学サテライトオフィス, 東京都千代田区, 2009年1月30日.
- ⑩ Y. Kabeya, Imperfect bifurcations arising in a nonlinear elliptic problem on the unit sphere, Workshop on the stationary problems in the nonlinear partial differential equations, 神戸大学工学部, 2008年12月10日.

[図書] (計 1 件)

- ① 壁谷喜継, 共立出版, フーリエ解析と偏微分方程式入門, 2010, 135.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.osakafu-u.ac.jp/~kabeya/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

壁谷 喜継 (KABEYA YOSHITSUGU)
大阪府立大学・工学研究科・教授
研究者番号：70252757

(2) 研究分担者 なし ()

研究者番号：

(3) 連携研究者 なし ()

研究者番号：