

研究種目： 基盤研究(C)  
 研究期間： 2007 ~ 2010  
 課題番号： 19540228  
 研究課題名(和文) 古典可積分系と量子可積分系の接点の探求

研究課題名(英文) Research on interplay between classical and quantum integrable systems

#### 研究代表者

笥 三郎 (KAKEI SABURO)  
 立教大学・理学部・教授  
 研究者番号： 60318798

研究代表者の専門分野： 数理物理学(可積分系)

科研費の分科・細目： 数学・大域解析学

キーワード： 可積分系, ソリトン, ヤン・バクスター写像, 相似簡約, パンルヴェ方程式

#### 1. 研究計画の概要

物理学におけるソリトンの研究に端を発する可積分系の理論は、1980年代に「KP階層」(佐藤幹夫・佐藤泰子)、「量子群」(神保道夫, V.G. Drinfeld)などといった数学的概念を生み出し、数学全体に対して大きな影響を与えている。可積分系の研究は、大別すれば「古典可積分系」、「量子可積分系」の2つに分類できる。量子可積分系は、対応する古典系を正準量子化したものであるため、両者はこの意味では初めから関係付けられている。しかし、両者にはそれ以上の結びつきがあることを、これまでの研究は示唆している。そこで本研究では、KP階層を中心とする古典可積分系理論から可積分系における「量子・古典対応」に迫り、背後にある数学的構造を解明することを目的としている。

具体的なテーマとしては、以下の2つを中心として扱う。

- (1) 古典可積分系の行列積分解とパンルヴェ系, ガルニエ系
- (2) 離散古典可積分系とヤン・バクスター写像

この2つを中心に、両者の関係、および関連する話題にも目を配りつつ研究を進める。

#### 2. 研究の進捗状況

まずは、上述のテーマ(1), (2)に関する研究成果を報告する。

テーマ(1)については、研究代表者の笥らによって導入された(2+1)次元NLS階層の相似簡約を考えることで、パンルヴェII型~VI型方程式を統一的に扱える手法を構築した(菊地哲也氏との共同研究)。このことから、直交多項式アンサンブルの相関関数がパン

ルヴェ方程式と関係するという Tracy-Widom による結果に、見通しのよい別証明が与えられる。この結果を拡張していくことで、より広いクラスの相関関数を、古典ソリトン理論を用いて取り扱うことが可能になると期待される。

テーマ(2)に関して、まずは離散ソリトン理論を整理する意味で、差分作用素による離散KP階層の定式化を行った。また、離散AKP方程式、離散BKP方程式の周期簡約からどのようなヤン・バクスター写像が得られるかを調べた(R. Willox氏, J.J.C. Nimmo氏との共同研究)。特にN周期BKP方程式から得られる双有理写像については、これまでの表現論的アプローチから得られている例とは一致しておらず、両者の関係を解明すべく研究を進めているところである。

テーマ(1), (2)は古典可積分系側からの研究であるが、量子可積分系側からの研究成果として、非対称shifted Jack多項式による有理型qKZ方程式の特殊解の構成があげられる。「非対称shifted Jack多項式」とは、量子多体系の波動関数の構成に用いられるJack多項式のある種の変形であるが、これまでは物理系への応用には用いられていなかった。今回の結果は、有理型R行列に付随するqKZ方程式という、一見すると関係のない対象との間に関係を見出したという点で、興味深い結果であると考えられる。

また、特殊関数に関連する研究も行い、その成果として、超幾何関数が満たす関数等式から、保存量を持つ非線形差分方程式を得る手法を開発した。さらに、推移確率がq-超幾何関数で表される確率過程を、具体的に構成した。

### 3. 現在までの達成度

<区分>

② おおむね順調に進展している。

<理由>

研究を開始する段階で中心として設定したテーマ(1), (2)に関して, 当初想定していたような研究成果が得られてきている。その反面, 当初の予想を超えるような, いい意味での意外な結果までは, 現在のところは得られていない。

### 4. 今後の研究の推進方策

最終年度である平成 22 年度には, 上述のテーマ(1), (2)のそれぞれに対して, ある程度の「一区切り」となる結果を与えたい。

テーマ(1)に関しては, これまでの結果を, 2次元退化ガルニエ系も扱えるように拡張する研究を, 菊地哲也氏(東大数理解析)と共同で行う。その際に, 熊本大学の研究グループ, 神戸大学の研究グループを訪問して, 研究上の交流を行う予定である。

テーマ(2)については, これまでに離散 AKP 方程式, 離散 BKP 方程式を扱った経験に基づいて, CKP, DKP を調べていくとともに, 「幾何クリスタル」などといった表現論的対象との関係も掘り下げていく。このテーマに関しては, Ralph Willox 氏(東大数理), Jonathan J. C. Nimmo 氏(Glasgow 大)と協力しつつ研究を進めているが, 表現論的な視点からの理解をさらに深めるために, 東大, 筑波大等の表現論研究者と連絡を取りつつ議論を深めていこうと考えている。

さらに, (1), (2)を貫く題材として, DKP 方程式系を詳細に調べることがあげられる。テーマ(1)の観点からは, ランダム行列として直交アンサンブル, シンプレクティックアンサンブルを調べることと対応し, テーマ(2)の観点からは D 型幾何クリスタルに付随する組合せ R と関係すると予想される。

これらの具体的テーマの研究を進めること, 特に, 従来よく理解されている A 型以外の場合を調べることで, 応用の可能性が広がることが期待できる。

研究計画終了時には, その時点までの成果を整理するとともに, 未解決の課題が何であるかを協力者と議論し, その後の研究への足がかりとすることも計画している。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① S. Kakei, J.J.C. Nimmo and R. Willox, Yang-Baxter Maps and the Discrete KP Hierarchy, Glasgow Mathematical Journal, 51 巻 0A号 (2009), 107-119

- ② S. Kakei, M. Nishizawa, Y. Saito and Y. Takeyama, The Rational qKZ Equation and Shifted Non-Symmetric Jack Polynomials, SIGMA 5 (2009), 010.
- ③ S. Kakei, J.J.C. Nimmo and R. Willox, Yang-Baxter Maps from the Discrete BKP Equation, SIGMA 6 (2010), 028.

[学会発表] (計 17 件)

- ① 筧三郎, Yang-Baxter Maps from the Discrete KP Hierarchy, 研究集会「可積分数理の新潮流」, 2007 年 8 月 22 日, 京都大学数理解析研究所.
- ② 筧三郎, Similarity Solutions of NLS-SDYM Hierarchy and Matrix Integrals, DMHF2007: COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality, 2007 年 10 月 2 日, 福岡リーセントホテル.
- ③ 筧三郎, 離散 BKP 方程式と Yang-Baxter 写像, 日本数学会 2010 年度年会, 2010 年 3 月 26 日, 慶應義塾大学矢上キャンパス.

[その他] 研究代表者ホームページ

<http://www.rkmath.rikkyo.ac.jp/~kakei/>