

研究種目： 基盤研究（C）  
 研究期間：2007～2008  
 課題番号： 19540229  
 研究課題名（和文） 遅れを持つ積分・微分方程式とその離散化方程式の精度と安定性  
 研究課題名（英文） Accuracy and stability for delayed integral and differential equations  
 and their discrete equations  
 研究代表者  
 室谷 義昭（MUROYA, Yoshiaki）  
 早稲田大学・理工学術院・教授  
 研究者番号：90063718

研究成果の概要:遅れを持つ微分方程式やその離散化方程式系の大域漸近安定性の研究、特に、2種の非自励、遅れを持つ共生 Lotka-Volterra 方程式系の、遅れに関係しない permanence 条件の導出、2種類の contractivity 条件、semi-contractive 関数の導入とその Clark モデルへの応用、Gopalsamy and Liu の conjecture の肯定的解決とその拡張、infection 項を持つ離散人口モデルの基本再生産数、Volterra 差分方程式の大域漸近安定性などの研究成果を得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論、数理生態学

#### 1. 研究開始当初の背景

生物数学におけるダイナミクスは数学者だけにとどまらず幅広い関心を呼び、生物のロバストな共存を表わすパーマネンスや、パーシステンスといった新しい数学的概念は、力学系の安定性や振動といった従来の概念を超えたものであり、その研究は数学の新しい分野を切り開くだけでなく、現実問題（種の多様性や絶滅リスク、伝染病や害虫の広がり、様々な最適化問題）の解決に有益な指標を与えている。特に、非自励系遅れを持つ logistic 方程式や Lotka-Volterra 方程式系やその離散化方程式の研究が目覚ましい発展を遂げつつある。

#### 2. 研究の目的

- (1) 遅れを持つ微分方程式やその離散化方程式の解の大域漸近安定性の研究、
- (2) ケモスタットモデルや病理モデルとその離散化方程式に対する安定性の研究、
- (3) Volterra 差分方程式の一様漸近安定性理論の精密化一般化の研究、
- (4) 比例遅れを持つ微分方程式に対する最適精度と選点の選び方の研究、
- (5) 非対称な係数行列を持つ連立方程式に対する、順序付きSOR法の研究、

### 3. 研究の方法

具体的には、現在投稿中の論文や準備中の研究を順次完成させる。

(1) 遅れを持つ微分方程式系やその離散化方程式形の大域漸近安定性について。

[11] の手法を基に、より洗練された semi-contractivity という概念を利用する証明法に改良し、より一般の離散化方程式に対しての新たな大域的安定性条件を導く。

差分方程式に対する大域漸近安定性の理論の精密化及び一般化を目指す。例えば、

Nicolson の blowflies 方程式、Mackey - Glass 方程式や Wazewska and Lasota 方程式などの "friction" と "negative feedback" 項に支配される、遅れを持つ微分方程式やその離散化方程式や、logistic 方程式などの非有界な遅れをもつ場合も含めて大域漸近安定性理論の発展を目指す。

(2) 病理疫学モデルとその離散化方程式に対する安定性理論の構築

病理モデルとして HIV-1, TTV-1 や古典的 SIR モデルの離散化方程式の基本再生産数の threshold parameter としての役割を研究する。さらに、より一般の Usher 行列モデルにもその手法を拡張する。

(3) Volterra 差分方程式の一致漸近安定性理論の精密化一般化について：

M. R. Crisci et al. (2000, Part I :Stab:Control: TheoryAppl: 3, 38-47) 論文の証明の考え方を整理し、大域漸近安定条件に応用し、従来の大域漸近安定条件を改良する。

有界な遅れをもつ離散化方程式の大域漸近安定性を求めるこれまでの研究手法を非有界な遅れをもつ Volterra 差分方程式の一致漸近安定性に応用する

### 4. 研究成果

平成 20 年度

(1) 遅れを持つ微分方程式やその離散化方程式系の大域漸近安定性について：

2 種の非自励、遅れを持つ共生

Lotka-Volterra 方程式系の、有界な遅れに関係しない permanence 条件を導出 ([2])。

非自励複数の区分的定数遅れを持つロジスティック方程式に対する 2 種類の contractivity の条件を与えた ([3])。

Semi-contractive function という概念を導入し、上杉等の論文の結果をクラークモデルに拡張した ([5])。

区分的定数遅れを持つロジスティック

方程式に対する Gopalsamy and Liu の conjecture の肯定的結果を成長係数が変数係数の場合まで拡張した ([7])。

区分的定数遅れを持つロジスティック方程式に対する contractivity 条件および対応する関数の性質を調べた ([1])。

(2) ケモスタットモデルや病理モデルとその離散化方程式に対する安定性理論について：

Infection 項を持つ一般の離散人口モデルについて、基本再生産数を与え、大域漸近安定性との関係を調べた。

(3) Volterra 差分方程式の安定性について：

クラークモデル型 Volterra 差分方程式の大域安定性条件の証明法を定式化した ([4])。

$q=0$  タイプの Volterra 差分方程式に対する大域漸近安定性条件を求めた ([9])。

(4) 比例遅れを持つ微分方程式に対する最適精度と選点の選び方について：

パンタグラフ方程式の長時間計算での、これまでの論文の計算法における弱点をカバーする "quasi-uniform meshes" による計算法を提案した ([6])。

比例遅れを持つ微分方程式に対する最適精度より高次の精度をもつ場合が起こる事、その個数を具体的に示した ([10])。

平成 19 年度

(1) 遅れを持つ微分方程式やその離散化方程式系の大域漸近安定性について：

Friction と delayed negative feedback 項を持つ非自励非線形微分方程式  $3/2$  タイプの大域漸近安定条件を一般化した ([16, 17])。

一般 York 条件で求めた、[E. Liz, V. Tkachenko and S. Trofimchuk, *SIAM J. Math. Anal.* **35** (2003), 596-622]、および、離散化モデルに応用し、発展させた、[V. Tkachenko and S. Trofimchuk, *J. Math. Anal. Appl.* **303** (2005) 173-187] 対し、手法を改良し、拡張を行った ([11, 12, 14, 15])。

近年、H. Li and R. Yuan によって解かれた、区分的定数遅れを持つロジスティック方程式に関する Gopalsamy and Liu の Conjecture の結果を、一部の非自励系に拡張を行った ([7])。

(2) Volterra 差分方程式の安定性について：

有限個の遅れを持つ差分方程式の大域漸近安定性理論の証明法を、非有界な遅れを持つ Volterra 差分方程式に応用し、帯域漸近安定性の条件を導出した ([4, 18])。

(3) 比例遅れを持つ微分方程式に対する最適

精度と選点の選び方について：

比例遅れ“ $qt$ 、ただし、 $0 < q < 1$ ”を持つ pantograph 方程式における collocation 法の attainable order  $O(h^{2m+1})$  より更に一段高い order  $O(h^{2m+2})$  の精度を持つ場合を調べた ([10])。

長時間の pantograph 方程式の数値計算法として、“quasi-uniform mesh”を使う有理関数近似法を提案した ([13])。

#### 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 18 件)

[1] G. Izzo, Y. Muroya and A. Vecchio, A general discrete time model of population dynamics in the presence of an infection, accepted in *Discrete Dynamics in Nature and Society*. (査読有り)

[2] Y. Nakata and Y. Muroya, Permanence for two species nonautonomous Lotka-Volterra cooperative systems with delays, *Nonlinear Analysis RWA* (2009), doi:10.1016/j.nonrwa.2009.01.002. (査読有り)

[3] Y. Nakata, M. Kuroda and Y. Muroya, Contractivity for nonautonomous logistic equation with piecewise constant delays, *CP1124, Mathematical Models in Engineering, Biology, and Medicine, Proceedings of the International Conference on Boundary Value Problems, edited by A. Cabada, E. Liz, and J.J. Nieto* (2009), 254-263. (査読有り)

[4] Y. Muroya and E. Ishiwata, Global stability for a class of difference equations, *J. Comput. Appl. Math.* **228** (2009), 561-570.

[5] Y. Muroya, E. Ishiwata and N. Guglielmi, New global stability conditions for a classes of difference equations, *Frontiers of Mathematics in China* **4** (2009), 131-154. (査読有り)

[6] E. Ishiwata and Y. Muroya, On collocation methods for delay differential and Volterra integral equations with proportional delay, *Frontiers of Mathematics in China* **4** (2009), 89-111. (査読有り)

[7] H. Li, Y. Muroya and R. Yuan, A sufficient condition for the global asymptotic stability of a class of logistic equations with piecewise constant delay, *Nonlinear Analysis RWA* **10** (2009), 244-253. (査読有り)

[8] Y. Muroya, New contractivity condition in a population model with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.* **346** (2008), 65-81. (査読有り)

[9] E. Messina, Y. Muroya, E. Russo and A. Vecchio, Asymptotic behavior of solutions for nonlinear Volterra discrete equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society* vol. 2008, Article ID 867623, 18 pages doi:10.1155/2008/867623. (査読有り)

[10] E. Ishiwata, Y. Muroya and H. Brunner, A super-attainable order in collocation methods for differential equations with proportional delay, *Appl. Math. Comput.* **198** (2008), 227-236.

[11] Y. Muroya, E. Ishiwata and N. Guglielmi, Global stability for nonlinear difference equations with variable coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **334** (2007), 232-247. (査読有り)

[12] Y. Muroya, Global attractivity for discrete models of nonautonomous logistic equations, *Comput. Math. Appl.* **53** (2007), 1059-1073. (査読有り)

[13] E. Ishiwata, Y. Muroya, Rational approximation method for delay differential

- equations with proportional delay, *Appl. Math. Comput.* **187**, (2007), 741-747. (査読有り)
- [14] Y. Muroya, Persistence and global stability in discrete models of Lotka-Volterra type, *J. Math. Anal. Appl.* **330** (2007), 24-33. (査読有り)
- [15] Y. Muroya and E. Ishiwata, Global attractivity for discrete Clark model  $Sx_{n+1}=qx_n+(1-q)g(x_{n-k})$ , *Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (2005 Okinawa)* (2007), 387-398. (査読有り)
- [16] Y. Muroya, Global stability for separable nonlinear delay differential systems, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (2007), 372-389. (査読有り)
- [17] Y. Muroya, A global stability criterion in scalar delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (2007), 209-227. (査読有り)
- [18] Y. Muroya, Stability of Volterra difference equations, 数理解析研究所講究録 **1551** (2007), 105-110 (査読無し)

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

室谷 義昭 (MUROYA YOSHIAKI)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：90063718