

平成22年 4月 8日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540230

研究課題名（和文） 量子群の表現論を用いた結び目や3次元多様体の幾何

研究課題名（英文） Study on geometry of knots and three manifolds by using representation theory of quantum groups

研究代表者

村上 順（MURAKAMI, Jun）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：90157751

研究成果の概要（和文）：結び目の量子不変量に関する体積予想を、カラードアレキサンダー不変量に注目して研究し、logarithmic 不変量や  $SL(2, C)$  量子  $6j$  記号の構成を行った。また、これらと双曲体積との関係を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：The volume conjecture for the quantum invariants of knots is studied from the view point of the colored Alexander invariant, and the logarithmic invariants and  $SL(2, C)$  quantum  $6j$  symbols are constructed. The relation between these and the hyperbolic volume is given.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：量子群，結び目，3次元多様体，表現論，TQFT

## 1. 研究開始当初の背景

1980年代に発見された結び目や3次元多様体の量子不変量について、2000年前後に双曲構造から定まる体積と関係することが予想され、体積予想とよばれるようになった。

また、量子不変量のパラメータと幾何的なパラメータの対応も予想された。いくつかの例については予想が確認されているが、一般的な解決法は知られていなかった。

## 2. 研究の目的

本研究では、カラードアレキサンダー不変量という結び目の量子不変量に注目し、この不変量に対応する量子群の表現論について研究した上で、これを手がかりにして体積予想にアプローチし、その解決を目指すことを目的とした。

そのために、体積予想を3次元多様体やその中の結び目に対してどのように一般化したら良いかについても明らかにすることを目指した。

### 3. 研究の方法

#### (1) 量子群の表現論の研究

- ① 結び目のカラードアレキサンダー不変量に対応する量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の表現論を研究する.
- ② 量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  で  $q$  が 1 の冪根の場合に, その有限次元の商である小量子群について構造や表現論を研究する.
- ③ ①, ② で研究した表現論について, どのように関係しているのかを調べる.

#### (2) 量子不変量の研究

- ① 結び目のカラードアレキサンダー不変量の性質を調べる.
- ② 量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  で  $q$  が 1 の冪根の場合に対応する小量子群と関係する量子不変量を調べた.
- ③ ①, ② で研究した不変量について, どのように関係しているのかを調べる.

#### (3) 体積予想の研究

体積予想を (2) で調べた不変量に対して拡張する.

### 4. 研究成果

#### (1) 量子群の表現論に関する成果

- ① 結び目のカラードアレキサンダー不変量に対応する量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の表現は,  $q$  が 1 の冪根の場合の非整最高ウェイト表現とよばれるものである. この表現のテンソル積表現の既約表現の分解則や, さらには具体的に基底を用いて分解の様子を詳しく記述することができた. さらに, この表現に対応する量子  $6j$  記号を求めることができた.
- ② 量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  で  $q$  が 1 の冪根の場合に, 小量子群について構造や表現論を調べた. これは有限次元のホップ代数であり, 正則表現が射影表現の直和になることや, 対称線形関数にどんなものがあるかが知られていることがわかった.
- ③ ①, ② で研究した表現論について, どのように関係しているのかを調べると, ① の非整最高ウェイト表現を 2 つ組み合わせたものでそのウェイトを整ウェイトに変化さ

せることで, ② での射影表現が得られることがわかった.

#### (2) 量子不変量に関する成果

- ① 結び目のカラードアレキサンダー不変量をいくつかの具体的な結び目, 絡み目で求めた. その結果, カラードアレキサンダー不変量がカラードジョーンズ多項式に非常に似た式になっていることがわかった. カラードジョーンズ多項式については京都大学数理解析研究所の葉廣氏によりよく研究されているが, 葉廣氏による式で和の取り方を少し変えるだけでカラードアレキサンダー不変量となることがわかった.
- ② 量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  で  $q$  が 1 の冪根の場合に対応する小量子群と関係する量子不変量として対数的不変量と呼ぶものを構成した. これは対数型共型場理論に対応する結び目の不変量である. また, 有限次元ホップ代数の性質から定義されるヘニングス不変量を一般化し, 体積予想の元になったカシャエフの不変量を一般の 3 次元多様体中の結び目に拡張した.
- ③ (1) ③ での表現の対応を用いて, 対数的不変量をカラードアレキサンダー多項式で書き表すことができた.

#### (3) 体積予想に関する成果

- ① カラードアレキサンダー不変量については, 結び目を芯とする錐多様体の双曲体積との対応がわかってきた.
- ② 小量子群に対応する不変量について, 対数的不変量についてはカラードアレキサンダー不変量と同様に錐多様体の体積と対応し, また, カシャエフ不変量の 3 次元多様体中の結び目への拡張についても, カシャエフ不変量と同じように, 補空間の双曲体積と対応することがわかってきた.
- ③ 量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の  $q$  が 1 の冪根の場合の非整最高ウェイト表現に対応する量子  $6j$  記号については, 双曲切頂四面体の体積との対応があることがわかった. 元々  $6j$  記号の研究は重力理論の研究から始まったのであるが, この結果は, ここでの量子  $6j$  記号が体積や重力の量子化の研究に有用であることを示唆している.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Jinseok Cho, Jun Murakami, Some limits of the colored Alexander invariant of the figure-eight knot and the volume of hyperbolic orbifolds. Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol.18 (2009), no. 9, 1271--1286.
- ② Jinseok Cho, Jun Murakami, Yoshiyuki Yokota, The complex volumes of twist knots. Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, Vol.137 (2009), no. 10, 3533--3541.
- ③ Jun Murakami, Kiyokazu Nagatomo, Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups. International Journal of Mathematics, 査読有, Vol.19 (2008), no. 10, 1203--1213.
- ④ Jun Murakami, Colored Alexander invariants and cone-manifolds. Osaka Journal of Mathematics, 査読有, Vol.45 (2008), no. 2, 541--564.

[学会発表] (計11件)

- ① 村上 順, On the tensor category of projective modules of the small quantum groups, Category Theory, Computer Science, and Topology, 2009年10月18日, 信州大学
- ② 村上 順, On the quantum 6j symbols for the non-integral highest weight representations of  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  at root of 1, 2009年度日本数学会秋期総合分科会, 2009年9月24日, 大阪大学
- ③ 村上 順, On the extra quantum group  $U_{\check{X}_i}(r)(\mathfrak{sl}_2)$  at root of 1, 2009年度日本数学会総会, 2009年3月28日, 東京大学
- ④ 村上 順, On the variations of quantum  $\mathfrak{sl}_2$  invariants of knots and links, Workshop on Turaev-Viro invariant and related topics, 2009年2月10日, 東京工業大学
- ⑤ Jun Murakami, On logarithmic knot invariant, Braids in Paris, 2008年9月18日, Univ. Paris Diderot (Paris 7), FRANCE
- ⑥ 村上 順, On branch problem of complex volume, Topology and Computer 2008, 2008年8月23日, 東京工業大学
- ⑦ 村上 順, 量子不変量の様々な state model, 量子 6j-symbol と双曲四面体の体積, Colored Alexander 不変量と体積

予想, 夏の学校「低次元トポロジーにおける未解決問題」, 2008年8月14, 15, 16日, 名古屋大学

- ⑧ Jun Murakami, On the TQFT Coming from the Restricted Quantum Group Finite Type Invariants, Fat Graphs and Torelli-Johnson-Morita Theory, 2008年4月3日, CTQM, University of Aarhus, DENMARK
- ⑨ 村上 順,  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  と関連する写像類群の表現について, Workshop on linear representations of the mapping class group and related topics, 2007年12月22日, 高知県, 国民宿舎桂浜荘
- ⑩ 村上 順,  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  at  $q=1$  と  $2+1$  次元トポロジー,  $2+1$  次元トポロジーの新しい流れ, 2007年11月14日, 早稲田大学
- ⑪ Jun Murakami, Colored Alexander invariant and cone manifolds, Workshop Hyperbolic Volume, 2007年7月3日, Universite Fribourg, SWISS

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.f.waseda.jp/murakami/>

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

村上 順 (MURAKAMI JUN)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：90157751

(2) 研究分担者  
( )

研究者番号：

(3) 連携研究者  
( )

研究者番号：