

平成 21 年 6 月 5 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540395

研究課題名 (和文) ランダム行列理論の位相的場の理論による解釈とその応用

研究課題名 (英文) Understanding of random matrix theory from topological field theory and its applications

研究代表者

氏名 (アルファベット) 氷上 忍 (HIKAMI SHINOBU)

所属機関・所属部局名・職名 東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号：30093298

研究成果の概要：外場があるランダム行列モデルでの密度相関関数のフーリエ変換が点付きモジュライ空間のスピンの曲線の交点数を与える導出関数になっていることを双対定理とレプリカ法により示した。レプリカ法により点付きモジュライ空間の曲線のトポロジカルな意味が明瞭になり、また双対定理により外場があるランダム行列モデルがギャップをもつ相転移点でのスケールリング則との関係も明らかにすることが出来た。Witten 予想を具体的に相関関数の積分表示で書き、それが一般化された Kontsevich マトリックスモデルと等価であることから証明することが出来た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：数理物理、メソスコピック系、リーマン面、トポロジー

## 1. 研究開始当初の背景

(1) ランダム行列理論は Wigner や Dyson による古くからの研究があるが、最近になって様々な分野にランダム行列理論が応用できることが判明している。その理由はランダム行列理論が普遍性を持つ為で、その相関関数が数学的な不変量を内蔵することによると考えられる。

(2) Wigner や Dyson のランダム行列に外場が結合したモデルを考えることにより、この普遍量を相関関数から計算する処方が見つかった。この外場のあるランダム行列理論と弦理論での行列モデルとの関係を明らかにする必要があった。

(3) 以前の研究によりランダム行列に外場が結合した場合にギャップ近辺で準位間隔分布が新しい普遍的振舞いを示すことを見出したが、その核(カーネル)はPearcey積分で与えられ、その高次特異性に研究上の興味があった。

(4) 最近の弦理論では、開いた弦理論と閉じた弦理論との間の双対性に興味を持たれているが、Kontsevichの行列模型はその双対性をあらわしていると考えられる。Kontsevich模型を一般化した場合に、この双対性がどのようにあられるのか知りたいところである。

## 2. 研究の目的

(1) 外場がある値にすると、状態密度が零になるエネルギー値が存在し、その点近傍での相関関数のフーリエ変換が不変量を与える。この不変量がリーマン面での曲線の交点数と一致することを示し、証明することを試みる。

(2) この交点数は一般にスピン曲線の場合に拡張されるので、ランダム行列理論による新しいスピン曲線の交点数の計算手法を確立することを行う。この交点数を導出する導出関数はGelfand-Dikiiヒエラルキー方程式をみたとするWitten予想があるが、交点数のトポロジカルな定義と行列模型でのコーシー積分との関係を明らかにし、その可積分構造(KdV方程式、KP方程式、パンルベ方程式等)をあきらかにする。

(3) 内蔵する超対称性を考察し、トポロジカルな場の理論との関係を明らかにすることを行う。

(4) 開いた弦理論と閉じた弦理論の双対性(open/closed duality)と本研究の双対性との関係を明らかにする。

(5) 交点数はGromov-Witten不変量と解釈できるので、インスタントンとの関連、多様体をCP1にした場合等の拡張をこころみる。

(6) 時間に依存したランダム行列に外場が結合した場合は2行列模型に帰着できることが知られている。その場合に、特性多項式と双対な行列模型を導出し、その振る舞いおよび不変量の計算を行う。また、中心電荷が1の共形場理論との関係をあきらかにする。

## 3. 研究の方法

(1) リーマン面上の点付きモジュライ空間での曲線の交点数はKontsevichによる行列模型が知られているが、この模型と双対な模型として、ガウシアンなランダム行列の状態密度が零となる端点での相関関数を考察する。

(2) さらに、高次の特異性として、p-スピン曲線の交点数を、ランダム行列理論の相関関数から計算する。

(3) N=2 超対称性を持ったトポロジカル場の理論との関係を考察する。genus 0の場合の分配関数を任意のpに対し計算し、そのデータからスーパーポテンシャルWを構成する。

(4) ランダム行列を複素対称行列に限らず反対称行列の場合や時間に依存した場合を考察し、新しい不変量を導出する。

## 4. 研究成果

(1) 外場があるランダム行列模型での密度相関関数のフーリエ変換が点付きモジュライ空間のスピン曲線の交点数を与える導出関数になっていることを双対定理とレプリカ法により示すことが出来た。この双対定理は特性多項式が他の特性多項式の平均で表されるという2つの異なる行列間の厳密な関係式である。この関係式で一般化されたKontsevich行列模型と外場のあるランダム行列模型との関係が明らかになった。レプリカ法により点付きモジュライ空間の曲線のトポロジカルな意味が明瞭になり、また双対定理により外場があるランダム行列模型がギャップをもつ相転移点でのスケールリング則との関係も明らかにすることが出来た。

(2) 交点数の導出関数がGelfand-Dikiiヒエラルキーを満たすというWitten予想に関して、p-スピン曲線のトップチェーンクラスを含有する交点数の定義を相関関数の積分表示で書くことができることを具体的に示し、交点数をあらわに計算し証明することが出来た。

(3) また、時間に依存する場合は2行列模型に帰着することを示し、そのトポロジカ

ル不変量を計算した。

(4) 外場のあるランダム行列模型が  $N = 2$  超対称共形場理論のトポロジカル場の理論と対応することを、スーパーポテンシャルを構成することにより確かめることが出来た。

(5) ランダム行列が反対称行列の場合の相関関数を考察し、対称行列との違いを具体的に計算した。

(6) 2次元のときの超対称 CP1 模型で Seiberg-Witten 理論から強結合と弱結合領域の境界線を計算し、インスタントンの解釈を行った。

5. 主な発表論文等(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 6件)

(1) E. Brézin and S. Hikami, Computing topological invariants with one and two-matrix models, JHEP **04** 110 (2009).

(2) E. Brezin and S. Hikami, Intersection theory from duality and replica, Commun. math. Phys. 283, 507 (2008).

(3) E. Brezin and S. Hikami, Intersection numbers from the antisymmetric Gaussian matrix model, JHEP **07**, 050 (2008).

(4) E. Brezin and S. Hikami, Intersection numbers of Riemann surfaces from Gaussian matrix models, JHEP **10**, 096 (2007).

(5) E. Brezin and S. Hikami, Vertices from replica, J. Phys. A. **40**, 13545 (2007).

(6) S. Hikami and T. Yoshimoto, Instanton and superconductivity in supersymmetric CP(N-1) model, J. Phys. A, **40**, F369 (2007).

〔学会発表〕(計 2件)

(1) S. Hikami, "Intersection numbers from duality and replica" ISF conference "Random matrices and replica" 2009年3月21日(Yad Hashmona, イスラエル)

(2) S. Hikami "Topological invariance in random matrices" 99<sup>th</sup> Statistical mechanics conference, 2008年5月11日(ラトガース大学, 米国)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ  
<http://dice.c.u-tokyo.ac.jp>

## 6 . 研究組織

### (1) 研究代表者

氷上 忍(HIKAMI SHINOBU)  
東京大学・大学院総合文化研究科・教授  
研究者番号：30093298

### (2)研究分担者

### (3)連携研究者