

平成 22 年 4 月 30 日現在

研究種目：基盤研究 (C)  
研究期間：2007 年度 ~2010 年度  
課題番号：19540400  
研究課題名 (和文) 格子模型のフラクタル構造と平衡および非平衡系への展開  
研究課題名 (英文) Fractal structure of lattice models and applications  
to equilibrium and non-equilibrium systems

研究代表者 南 和彦 (Minami Kazuhiko)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授  
研究者番号：40271530

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学、数理物理・物性基礎

キーワード：可積分系、可解格子模型、IFS フラクタル

### 1. 研究計画の概要

代表的な可解模型のひとつである six-vertex 模型に IFS 型のフラクタル構造が現れることがわかっている。この事実を起点に、格子模型とフラクタル幾何との関係を一般的に定式化する。これにより、格子模型における研究の蓄積がフラクタル幾何に翻訳され、フラクタル幾何において知られている諸概念を、格子模型の統計力学に翻訳することができる。

IFS 型のフラクタルの生成規則は、各種の力学系、確率過程に対応するものと考えることができる。そこで上記の事実を起点にして、格子模型における知見と手法を、力学系、確率過程等を含む非平衡系に応用する。さらに格子模型の臨界現象、スケーリング、くりこみ群の理論を、この視点から再構成したい。

### 2. 研究の進捗状況

(1) Six-vertex 模型の状態空間において Ice rule をみたく配位の生成の規則は IFS によって記述され、可能な配位の全体は熱力学的極限において IFS フラクタルになる。six-vertex 模型において対応するフラクタル集合を構成し、そのフラクタル次元と自由エネルギーとの関係を定式化した。この結果、格子模型において境界条件を分類する n-equivalence に加えて、可解模型での基本的な道具である伝送行列にあたる構造が、フラクタル幾何において既に知られていたことが分かる。この対応関係は一般に伝送行列によって取り扱われる格子模型で同様に成り立つ。

(2) 2 体の XYZ 相互作用と 4 体の Ising 相互作用からなる格子模型の厳密解を得て、その相図を詳細に解析した。この模型はその極限として 1 次元と 2 次元の Ising 模型を含み、また 4 体力による場によって相互作用する dimer 模型とも見なせる。これは本質的に eight-vertex 模型であり、それに対応して臨界点では臨界指数が連続変化するが、その変換の非線形性を反映して、相図にはリエントラント転移が現れる。

(3) 細胞選別の数理モデルは、細胞どうしが接着してパターンを形成する生物学上の問題を数理モデル化したものであるが、その最も簡単な場合は格子上のスピン模型である Ising 模型と等価である。このうち 2 次元正方格子について、Ising 模型の転送行列は 1 次元の XY 模型および transverse Ising 模型のハミルトニアンと可換、したがって同時対角化可能であり、その結果、後者と等価な生物系のモデルであれば、それは細胞選別のモデルと等価であるがあることがわかる。スピン格子模型を経由したこの一連の等価性を通じて、一見異なる生物系、生態系どうしが共通の数理構造を持つ可能性を指摘した。

### 3. 現在までの達成度

区分：②おおむね順調に進展している。  
理由：Six-vertex 模型のフラクタル構造の基本的な定式化を終えた。格子模型の新しい可解な例として eight-vertex 模型と等価な dimer 模型を見出した。また格子模型における等価な系列の代表例である 2 次元 Ising 模型・1 次元量子系の等価性に相当する、生物系の意味のある問題を見出した。

4. 今後の研究の推進方策

可解模型のフラクタル構造については、さらに一般の格子模型について解析し定式化する。格子模型の数理構造は、非平衡系や複雑系にかなりの程度で応用可能であるように思われ、これについて具体例を蓄積したい。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

1) Kazuhiko Minami: "Fractal structure of a solvable lattice model", International Journal of Pure and Applied Mathematics, 査読有, 59 (2010) 243-255

2) Tetsuro Konishi and Tatsuo Yanagita: "Energetic motion of end-particles in constrained dynamical systems", Journal of Statistical Mechanics, 査読有, 2009 (2009) L09001

3) Kazuhiko Minami: "The free energies of six-vertex models and the n-equivalence relation", Journal of Mathematical Physics, 査読有, 49 (2008) 033514

[学会発表] (計 14 件)

1) Tetsuro Konishi and Tatsuo Yanagita: "Slow relaxation to equi-partition in spring chain systems", Workshop on dynamical systems theory and reaction dynamics toward large systems, 2010年1月6日, 京都大学

2) Kazuhiko Minami: "Fractal structure of a solvable lattice model", Annual APS March Meeting, 2009年3月16日, Pittsburgh, PA, USA

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年月日 :

国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年月日 :

国内外の別 :

[その他]