

平成 22 年 6 月 28 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19549005
 研究課題名 (和文) 無限大不変測度を持つ可測力学系のエルゴード理論とその測度論的数論への応用
 研究課題名 (英文) Ergodic theory of the measurable dynamical systems with infinite invariant measure and its applications to metric number theory

研究代表者
 夏井 利恵 (NATSUI RIE)
 日本女子大学・理学部・助教
 研究者番号：60398633

研究成果の概要 (和文)：無限大不変測度を持つ可測力学系において randomness の特徴付けを目指し、数の持つランダム性について、エルゴード理論的観点からの新しい解釈を試みた。特に、具体的な研究モデルとして、 α -連分数変換や number theoretic algorithm とよばれる数論的変換に対して、数の持つ複雑性についての結果を得ることが出来た。

研究成果の概要 (英文)：In the measurable dynamical system with the infinite invariant measure, this research aims to characteristic of randomness, and tried the new interpretation from the point of view of the ergodic theory. In particular, this research could get the results for the complexity of numbers for number theoretic transformations, called α -continued fraction transformations and number theoretic algorithm, as the concrete research model.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	700,000	0	700,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	720,000	3,820,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：力学系理論、エルゴード理論

1. 研究開始当初の背景

可測力学系における有限不変測度を持つ変換のエルゴード理論的研究は、同型定理や分

類問題など数多くの重要な結果が知られており、その一般的体系はある程度築き上げられている。一方、エルゴード変換の幾つかの

重要な例の中には無限大不変測度を持つ変換が見られ、このような変換に対する新たな研究の進展が期待されている。しかしながら、個別の結果は幾つか知られているものの、その一般的体系はほとんど構築されていない。これまで取り組んできた期待値無限大の定常確率過程の研究と無限大不変測度を持つ1次元写像の one-parameter family の同型問題に関する研究成果から、具体的な数論的変換のモデルの研究を通して、数の持つランダム性に着目したこの系の解明に着手した。

2. 研究の目的

無限大不変測度を持つ可測力学系における **determinism** と **randomness** の概念に着目し、具体的なモデル、特に、数論的変換のモデルの研究を通して、これらの概念の違いを明らかにする。ここでは、特に、数の持つ **complexity** に着目する。そして、その違いを捉えるような新たな不変量を見出すことにより無限大不変測度を持つ可測力学系の分類問題へと発展させ、無限大不変測度を持つ可測力学系の一般的特徴付けを行うことにある。更に、この研究を通して **metric number theory** や擬似乱数理論への応用に取り組み、数の **complexity** について力学系の立場から新たな視点を発見することも目的とする。

3. 研究の方法

無限大不変測度を持つ可測力学系において **randomness** の特徴付けを目指す。そこで、まず数の持つランダム性について力学系理論から新たな解釈を発見することに焦点を当てる。具体的には、主に次の数論的モデルに対する研究から探る。

(1) 非アルキメデス数体上でのディオファントス近似に対する考察

positive characteristic を持つ local field 上での metric Diophantine 近似問題に取り組む。ここでは特に、実数体上での素数に対応する irreducible polynomial を分母に持つ有理関数による近似の問題を考え、その解の個数の評価について測度論的研究を行う。

更に、irreducible polynomial の power や irreducible polynomial の積から構成される多項式など幾つかの数論的意義を持つような例に対しても metric Diophantine 近似の問題を考えて行く。そして、これらの研究を通して、G.Larcher や H.Niederreiter により導入された generalized Kronecker sequences とよばれる擬似乱数の生成理論に深く関係している概念との関連性を追及したい。ここから、エルゴード理論、力学系理論の観点から擬似乱数生成理論に対しての新たな展開を試みると共に、数の持つランダム性に対して新たな解釈の発見へと発展させて行く。

(2) α -連分数変換に関する考察

数展開のアルゴリズムの一つである α -連分数については、パラメータ α が 0 に近い小さなところでは非常に複雑な構造を持つことが予想され、そのエルゴード理論的性質はあまり解明されていない。そこで、 α -連分数変換を対象にしたエルゴード理論的研究を行い、そこから、複雑な様相を持つアルゴリズムを解明し、数展開や数の持つランダム性に対して新たなアイデアの創造を試みる。

4. 研究成果

以下の具体的な研究成果により、数の持つランダム性に関する解明の大きな前進を得ることが出来た。

(1) α -連分数変換に関する研究

無限大不変測度を持つ可測力学系を生み出す例としても、また、連分数という数展開のアルゴリズムの数論的観点からも興味深い α -連分数変換のエルゴード理論的研究として、エントロピーの non-monotonicity を証明することに成功した。この研究成果は、上述のように、 α -連分数のアルゴリズムは、0に近い α については、非常に複雑な様相を持ち、その性質はあまり解明されていなかった。本研究成果は、特に、パラメータ α が 0 に近い場合に、その性質の解明に繋がったという点に大きな意義を持つ。また、数の複雑な振る舞いを解明する重要な性質を証明できたことにも意義がある。

(2) α -Brjuno functions に関する研究
 α -連分数変換をさらに一般化した α -Brjuno functions というクラスを新しく定義し、エルゴード理論的性質に関する研究成果を得た。本研究成果は、上述のように、無限大不変測度を持つ可測力学系を生み出す例としても、また、連分数という数展開のアルゴリズムの数論的観点からも興味深い α -連分数変換をさらに一般化したクラスである α -Brjuno functions を新しく導入し、このクラスを研究対象としたことで、さらに、広いクラスでの、広域のかつ総括的に数の持つ振る舞いの解明に発展させて行った点にある。

(1), (2)の研究成果により、複雑な振る舞いをする数の持つランダム性を捉える重要な一歩を得ることが出来た。

(3) 非アルキメデス数体上でのディオファントス近似に関する研究
 非アルキメデス数体上で、irreducible polynomial を分母を持つ有理関数によるディオファントス近似問題に対して、その解の個数の測度論的性質を得た。本研究成果は、Formal power series を研究対象とすることで、実数だけでは捉えきれない、より複雑な数の持つ振る舞いを捉える一歩となるとともに、数論的アルゴリズムとしての、擬似乱数理論への繋がりという意味でも、重要な結果となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Laura Luzzi, Stefano Marmi, Hitoshi Nakada and Rie Natsui, Generalized Brjuno functions associated to α -continued fractions, Journal of Approximation Theory, 査読有, 162 号, 24--41 頁, 2010 年
- ② Valerie Berthe, Hitoshi Nakada and Rie Natsui, Asymptotic behavior of the number of solutions for non-Archimedean Diophantine

approximations with restricted denominators, Finite Fields and Their Applications, 査読有, 14 号, 849--866 頁, 2008 年

- ③ Hitoshi Nakada and Rie Natsui, The non-monotonicity of the entropy of α -continued fraction transformations, Nonlinearity, 査読有, 21 号, 1207--1225 頁, 2008 年.

[学会発表] (計 7 件)

- ① Rie Natsui, On the Euclidean algorithm and Farey map for formal power series, Recent Topics in Ergodic Theory, 2009 年11月6日, 日本大学(東京)
- ② 夏井利恵, Euclidean algorithm in positive characteristic and associated Farey map, Dynamics of complex systems 2009, 2009 年 8 月 31 日, 北海道大学(北海道)
- ③ Rie Natsui, Non-monotonicity of entropy of alpha-continued fraction transformations, Measurable and Topological Dynamical Systems in Asia, 2009 年 6 月 18 日, Ajou University (Korea, Suwon)
- ④ 夏井利恵, Asymptotic behavior of the number of solutions for non-Archimedean Diophantine approximations with restricted denominators, エルゴード理論とその周辺, 2008年11月29日, 日本大学(東京)
- ⑤ 夏井利恵, α -Rosen continued fractionsについて, 数論とエルゴード理論, 2008年2月10日, 金沢大学(石川)
- ⑥ Rie Natsui, On the entropy of alpha-continued fraction transformations, Ergodic Theory and its applications, 2007年12月21日, 慶應義塾大学(神奈川)
- ⑦ 夏井利恵, 仲田均, α -連分数変換から作られる確率過程の1-parameter family

のentropyの変化について，2007日本数
学会秋季総合分科会統計数学分科会，
2007年9月21日，東北大学(宮城)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

夏井利恵 (NATSUI RIE)

日本女子大学・理学部・助教

研究者番号：60398633

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし