様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 5 月 17 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007 ～ 2009
課題番号：19560435
研究課題名（和文） 多様体の大域的構造を考慮した非線形制御理論の構築

研究課題名（英文） Establishment of nonlinear control theory taking into account global structure of manifold

研究代表者
山下 裕 （YAMASHITA YUH）
北海道大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：90210426

研究成果の概要（和文）：本研究では、従来の一般的な理論では扱うことのできなかった非ユークリッド空間を含む一般の多様体上の非線形システムを制御する統一的な枠組みを示した。衛星の大域姿勢制御や移動体の障害物回避・鉄棒ロボットなどがそのような問題の例である。そのような対象を安定化するのに必要な不連続性・ロジック・ランダム性などを含む制御則が、本研究の手法によって自動的に設計される。

研究成果の概要（英文）：This study presents a general framework for controlling nonlinear systems on general manifolds including non-Euclidean spaces which precedent control theories cannot handle. Global attitude control of satellites, obstacle avoidance of vehicles, and control of acrobots are examples of our problem. This framework provides design procedures generating control laws automatically with discontinuity, logic, or randomness, of which properties are necessary to stabilize such systems on non-Euclidean spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：システム制御理論
科研費の分科・細目： 電気電子工学・制御工学（5107）
キーワード：非線形制御理論，多様体，漸近安定化，制御リアプノフ関数

１．研究開始当初の背景

非線形制御の大きな利点として考えられてきた「大域的制御の実現」までには、まだ複数の障害が残っている。一つはピーキング現象の存在であり、完全な解決は難しく、ISS 性やIISS 性を仮定するか、あるいは問題設定を変えて準大域的制御問題を代わりに考えることで研究がなされている。もう一つの障害は、可縮な多様体(≒ ユークリッド空間に同相な多様体）ではない、より一般の多様体上の制

御システムを大域的漸近安定化することが難しい、という点である。このことに関しては、有名な定理として「滑らかで大域的に漸近安定なシステムは、可縮な多様体上のシステムしかありえない。」というものがある。これにより、たとえば、航空機・人工衛星などの3次元剛体の姿勢制御系では滑らかな厳密な意味での状態フィードバックでは大域的漸近安定化不可能であることが結論できる。また、アーム干渉が無い鉄棒ロボットや倒立振子の振り上げ制御において、回転数を考えない滑らかな状態フィードバックでは漸近安定化できない。つまり、安定化しようとしても、原点の安定平衡点以外にも、不安定な平衡点が必ず生じてしまう。原点以外の平衡点の存在は、大域的安定性の定義に反しており、大域的安定化に失敗してしまう。それだけではなく、原点以外の不安定な平衡点は、その扱いが非常に厄介である。

このような一般の多様体上の制御系設計に関しては、研究開始当初、本研究グループのいくつかの予備的研究があるだけであった。

２．研究の目的

本研究は、多様体の構造を考慮して一般の多様体上のシステムの制御を行う手法を導くことを目的とする。具体的には、以下のとおりである。

(1) 滑らかな制御リアプノフ関数を使う方法は本研究グループにて既に提案していたが、その条件を明らかにする。
(2) 微分不可能な制御リアプノフ関数を用いる方法を開発する。
(3) 望ましくない平衡点近傍から、摂動を加えることにより脱出する方法について研究する。
(4) 制御系の多様体を単純な多様体で覆い、制御する方法を開発する。
(5) 動的補償器を用いて、一般の多様体上の制御系を設計する方法を導く。

３．研究の方法

(1) 微分位相幾何学・動的システム理論を用いて、上記研究目的に沿った理論体系を整備する。
(2) 具体的な対象に応用し、構築した理論の実証を行う。

４．研究成果

(1) 滑らかなリアプノフ関数を用いる方法

制御対象

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \qquad (1)$$

を考える。ここで、$x \in \mathbb{M}$, $u \in \mathbb{R}^m$ は系の状態と入力であり、$\mathbb{M}$ は一般の n 次元多様体である。ここで、次の条件を満たす滑らかな関数 $V(x)$ を（弱い意味での）制御リアプノフ関数という。

- $V(x)$ は正定で滑らか、かつプロパー（サブレベル集合がコンパクト）である。
- $V(x)$ はその臨界点（$\partial V/\partial x = 0$ となる点）を除き、

$$(L_g V)(x) = 0 \rightarrow \left(L_f V\right)(x) < 0 \qquad (2)$$

を満たす。

- $V(x)$ の臨界点は、孤立点であり、(1)のゼロ多様体

$$\{(x,u) | f(x) + g(x)u = 0\} \qquad (3)$$

を $\mathbb{M}$ に射影した集合上にある。

原点以外の臨界点の存在を許容し、そのような点で条件を緩和しているため、弱い意味での制御リアプノフ関数となっている。$V(x)$ の臨界点を平衡点とするようなフィードバックを $u = \alpha_{\mathrm{pre}}(x)$ とすると、

$$f(x) + g(x)\alpha_{\mathrm{pre}}(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{Q} \qquad (4)$$

となる。ただし、$\mathbb{Q}$ は $V(x)$ の臨界点集合。このとき、$\alpha_s(x)$ を $V(x)$ から生成された Sontag 型制御則（Sontag 1989)とすると、

$$u = \alpha_{\mathrm{pre}}(x) + \alpha_s(x) \qquad (5)$$

は、$\mathbb{M}$ のほとんどの初期値に対し原点を漸近安定化する。ただし、適切な小入力特性を持つと仮定している。

ここで、次の仮定を置く。

$$\min_i \lambda_i \left[g(x)^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g(x) \right] < 0,$$
$$x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \qquad (6)$$

ただし、$\lambda_i[\cdot]$ は固有値を表す。すると、不連続フィードバック

$$\begin{aligned} u = {} & \alpha_{\mathrm{pre}}(x) + \alpha_s(x) \\ & -\mathrm{sgn}(L_g V \cdot \beta(x))\beta(x) \end{aligned} \qquad (7)$$

はシステムの原点を大域的漸近安定化する。ただし、$\beta(x)$は原点でゼロとなり、原点以外の臨界点において$g^T(\partial^2 V/\partial x^2)g$の負の固有ベクトル空間に含まれるような連続な m 次元ベクトル値関数とする。本研究は、1 入力系で与えられていた予備研究の結果を多入力系に拡張したものである。

本研究では、さらに、一般の多様体上の制御システムにユークリッド空間上のアクチュエータが付随する場合

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)y \\ \dot{y} &= h(x) + Ju \end{aligned} \qquad (8)$$

を考え、多様体上でのバックステッピングする方法を導いた。ただし、$x \in \mathbb{M}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ で、J は正則行列である。(1)式に対する制御リアプノフ関数 $V(x)$ および制御則(5)が与えられているとき、(8)式に対する制御リ

アプノフ関数は、

$$W(x,y) = V(x) + \frac{K}{2}\left\|y - \alpha_{\mathrm{pre}}(x) - \alpha_s(x)\right\|^2 \tag{9}$$

で与えられる。ただし、この拡張系の制御リアプノフ関数は、(6)式に相当する条件を満たさない。よって、この場合、(3)節で述べる「2つの制御リアプノフ関数を切り替える方法」を採用する必要がある。

(2) 微分不可能な制御リアプノフ関数を用いる方法

Rifford 2002 の結果が一般の多様体でも通用することを示した。ただし、寄生解を除くような適切な微分方程式の解の定義がなされているとする。すなわち、局所半凹な微分不可能な強い意味での制御リアプノフ関数が存在すれば、Sontag 型制御則で大域的漸近安定化が達成される。この結果は後の(5)節で得られた制御リアプノフ関数よる制御を実行するのに用いられる。

(3) 摂動を加える方法

ここでは再び滑らかな制御リアプノフ関数を考えるが、(1)節で述べた制御リアプノフ関数とは多少違う定義を用いる。すなわち、

- $V(x)$ は正定で滑らか、かつプロパー (サブレベル集合がコンパクト) である。
- $V(x)$ は原点を除き、

  $(L_g V)(x) = 0,$ かつ

$$\min_i \lambda_i\left[g(x)^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g(x)\right] \geq 0 \rightarrow \left(L_f V\right)(x) < 0 \tag{10}$$

を満たす。

この条件は(6)式も含むことに注意する。システム(1)を確率微分方程式とみなし、m 次元標準 Wiener 過程 w を用いた入力

$$u dt = \bar{u} dt + \Sigma(x) dw \tag{11}$$

により、

$$dx = f(x)dt + g(x)\bar{u}dt + \Sigma(x)dw \tag{12}$$

となる。これを確率的大域安定化する $\bar{u}$ と $\Sigma(x)$を見つけるのが問題となる。

本研究では、以下のような制御則を提案した。

$$\Sigma(x) = k_s(x)P(x)S(x) \tag{13}$$

$$S(x) = \left(\sum_i q(-\lambda_i[H]) + \varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{diag.}(q(-\lambda_1[H]), \dots, q(-\lambda_m[H])) \tag{14}$$

ただし　$H(x) = g(x)^T \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} g(x)$

$P(x) = \left[p^{(1)}(x), \dots, p^{(m)}(x)\right]$

（$p^{(i)}$ は H の正規化固有ベクトル） (15)

$$q(s) = (s + |s|)/2 \tag{16}$$

$$k_s = \sqrt{2\frac{L_f V + \sqrt{L_f V^2 + r(x)^2}}{r(x)}}$$

$$\left(r(x) = -\mathrm{tr}(S^T P^T H P S) + L_g V L_g V^T\right) \tag{17}$$

$$\bar{u} = -\frac{\vartheta(x) + \sqrt{\vartheta(x)^2 + \left(L_g V L_g V^T\right)^2}}{L_g V L_g V^T} L_g V^T$$

$$(\vartheta(x) = L_f V + \mathrm{tr}(\Sigma^2 H \Sigma)/2) \tag{18}$$

この制御則は、原点を確率的大域安定化する。すなわち、閉ループ系の状態は確率 1 で原点に収束する。

上記の Wiener 過程を利用した制御では、(6)式の条件を緩和しているわけではないことに注意する。(6) 式を満たしていない場合、原点以外の臨界点から脱出するためには、$V(x)$ の(確定的あるいは確率的な意味での)単調減少性をあきらめなければならない。本研究では、そのような場合において、2 つ制御リアプノフ関数を用意し、その 2 つのどちらかが常に単調減少となるように切り替える方法により、このような問題を解決する方法も開発した。

(4) 単純な多様体で覆う方法

可縮でない多様体上で定義される制御系に対する微分不可能な制御リアプノフ関数設計は難しい問題である。しかし、可縮な多様体，特にユークリッド空間上で定義される制御系に対しては数多くの微分可能制御リアプノフ関数設計法が提案されている。本研究では、可縮でない多様体上において微分不可能制御リアプノフ関数設計を行うためにまずシンプルな構造を持つ多様体上で滑らかな制御リアプノフ関数を設計し，それをもとの可縮でない多様体上に射影することによりもとの多様体における制御リアプノフ関数を設計する手法を開発した。

この節では、(1)式ではなく、より一般の

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{19}$$

を制御対象として考える。まず、単純な構造を持つ n 次元 $\mathcal{C}^1$ 可微分多様体 $\bar{\mathbb{M}}$ を考える。ここで、$\bar{\mathbb{M}}$ は以下の条件を満たすなめらかな写像 $\phi\colon \bar{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ によってもとの可縮な多様体 $\mathbb{M}$ と関係を持っているものとする。

- ϕ は全射。
- $\phi(0) = 0$
- 任意の $\bar{x} \in \bar{\mathbb{M}}$ に対して、$\phi_*\colon T_{\bar{x}}\bar{\mathbb{M}} \to T_x\mathbb{M}$ は連続で全単射。ここで、$x = \phi(\bar{x})$。

$\bar{\mathbb{M}}$ は $\mathbb{M}$ の被覆空間とは限らないことに注意する。すなわち、$\bar{\mathbb{M}}$ の無限遠点が $\mathbb{M}$ の無限遠点に写像されるとは限らない。そのため、

aspherical manifold 以外にも適用可能となっている。

この写像により、リフトされた制御系

$$\dot{\bar{x}} = \phi_*^{-1} \circ f(\phi(\bar{x}), u) = \bar{f}(\bar{x}, u) \quad (20)$$

が一意に定まる。この単純な構造を持つ多様体上の系に対し制御リアプノフ関数 $\bar{V}(x)$ が何らかの方法で設計されたものとする。そのとき、可縮とは限らない元の多様体上の制御リアプノフ関数は、

$$V(x) = \min_{\bar{x} \in \phi^{-1}(x)} \bar{V}(\bar{x}) \quad (21)$$

のように求められることを示した。これが実際に制御リアプノフ関数になることは本研究によって証明されている。また、元の制御リアプノフ関数が滑らかでも、最終的な制御リアプノフ関数は微分不可能になる。これは「滑らかで大域的に漸近安定なシステムは、可縮な多様体上のシステムしかありえない。」という事実と対応している。さらに、$\bar{V}(x)$ が局所半凹ならば(滑らかな関数は常に局所半凹)、$V(x)$ も局所半凹関数となることも証明した。

本研究グループでは、以上の手法を「最小射影法」(Minimum Projection Method)と名付けた。

(5) 動的補償器を用いる方法

(1)式の制御対象に対して、動的補償器を付加した制御系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ \dot{p} &= v \end{aligned} \quad (22)$$

を考える。ただし、p および v は適当な次元のベクトルである。このように拡張しても可縮でない多様体の制限は緩和されない。すなわち、可縮でない多様体の場合は、(1)節で述べたような弱い意味での滑らかな制御リアプノフ関数 $V(x,p)$ は原点以外にも臨界点を持つ。しかしながら、それらの臨界点を $\mathbb{M}$ に射影した点が $\mathbb{M}$ の原点に重なるのであれば、(5)式と同様な制御則を拡張空間に対して構築することによって、$x \to 0\ (t \to \infty)$ が言える。ここで、動的補償器の状態 p は必ずしも原点に収束することが保証されているわけではないことに注意する。そこで、動的補償器の状態 p はコントローラ内部の変数であり実システムの変数では無いという事実に着目し、適切な状態ジャンプ則によって原点以外の臨界点近傍の p を原点近傍にジャンプさせる。これにより、(worst ケースにおける)収束時間が改善される。本研究では、以上の設計手法を提案し、(x,p) の大域的漸近安定性、および、状態ジャンプは高々1 回しか起きないことを証明した。また、このような拡張空間での制御リアプノフ関数の満たすべき条件を導き、簡単な場合の制御リアプノフ関数の拡張方法を示した。

(6) 提案手法の検証

以上提案した方法は、人工衛星の大域的氏制御問題や移動ロボットの障害物回避問題に適用され、その有用性を明らかにした。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）

① 西村悠樹, 山下裕, Markov 過程の量子化を用いた Lyapunov 関数の構築, 計測自動制御学会論文集, 査読あり, 44 巻, 2008, pp.26-35.

② 都築卓有規, 山下裕, 不連続制御系の解と大域漸近安定化問題, システム/制御/情報, 査読あり, 52 巻, 2008, pp.84-89.

③ 中村文一, ブローアップを用いた同時ベクトル場の解析, システム/制御/情報, 査読あり, 52 巻, 2008, pp.90-95.

④ 西田豪・B. Mascheke, 無限時限ハミルトンおよびラグランジュ系におけるディラック構造, システム/制御/情報, 査読あり, 52巻, 2008, pp.96-102.

⑤ G. Nishida, T. Tsuzuki, H. Nakamura, Y. Yamashita, Global asymptotical stabilization of Morse-Smale systems using weak control-Lyapunov functions, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, 査読あり, Vol. 2, 2009, pp.43-49.

⑥ 西村悠樹, 山下裕, Markov過程の量子化を用いた確率的Lyapunov関数の近似構築, システム制御情報学会論文誌, 査読あり, 22巻, 2009, pp.295-302.

⑦ H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani, Minimum Projection Method for Nonsmooth Control Lyapunov Function Design on General Manifolds, Systems & Control Letters, 査読あり, Vol.58, 2009, pp.716-723.

〔学会発表〕（計 19 件）

① H. Nakamura, G. Nishida, H. Nishitani, Asymptotic stability of gradient homogeneous systems, European Control Conference 2007, Kos, Greece, 2007.

② G. Nishida, M. Yamakita, Z. Luo, Time-varying port-representation of dissipative structures with gauge transformations, European Control Conference 2007, Kos, Greece, 2007.

③ N. Nakamura, H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani, Homogeneous eigenvalue analysis for complex homogeneous systems, 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control

Systems, Pretoria, South Africa, 2007.

④ G. Nishida, R. Enomoto, M. Yamakita, Z. Luo, Port-based energy balance on compact manifolds, 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Pretoria, South Africa, 2007.

⑤ H. Nakamura, N. Nakamura, H. Nishitani, Stabilization of homogeneous systems using implicit control Lyapunov functions, 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Pretoria, South Africa, 2007.

⑥ K. Takehara, T. Tsuzuki, Y. Yamashita, Global asymptotic stabilization of nonlinear system with multiple singular points using changeover of control Lyapunov-Morse function, SICE Annual Conference 2007, Takamatsu, Japan, 2007.

⑦ N. Nakamura, H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani, Homogeneous eigenvalue analysis for complex homogeneous systems of degree (*l*,*l*), SICE Annual Conference 2007, Takamatsu, Japan, 2007.

⑧ Y. Hirose, Y. Yamashita, Semi-Global Output Regulation of Nonminimum-phase Nonlinear Systems via Error Feedback, SICE Annual Conference 2007, Takamatsu, Japan, 2007.

⑨ N. Nakamura, H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani, Homogeneous stabilization for input-affine homogeneous systems, 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, USA, 2007.

⑩ G. Nishida, M. Yamakita, Z. Luo, Port-representation of bi-Hamiltonian structure for infinite-dimensional symmetry, 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, USA, 2007.

⑪ G. Nishida, M. Yamakita, Z. Luo, Field port-Lagrangian systems with degenerate Lagrangian and external forces, New Orleans, USA, 2007.

⑫ T. Tsuzuki, Y. Yamashita, Global asymptotic stabilization for a nonlinear system on a manifold via a dynamic compensator, 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, 2008.

⑬ G. Nishida, T. Tsuzuki, H. Nakamura, Y. Yamashita, Stabilization of Nonlinear Systems using Weak-Control-Lyapunov Functions, 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, 2008.

⑭ Y. Nishimura, Y. Yamashita, Stochastic Lyapunov Function Design using Quantization of Markov Process, 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008.

⑮ G.Nishida, D. Ichishima, K.Kashima, K.Fujimoto, M.Yamakita, R. Ikeura, Scaling reduction of port-Hamiltonian systems for numerical calculation, ICROS-SICE International Joint Conference 2009, Fukuoka, Japan, 2009.

⑯ G.Nishida and H.Nakamura, Variational structure of infinite-dimensional homogeneous systems with dilations, European Control Conference 2009, Budapest, Hungary, 2009.

⑰ H. Nakamura, Y. Yamashita, H. Nishitani, Asymptotic Stabilization of Nonlinear Systems on General Manifolds via Minimum Projection Method, European Control Conference 2009, Budapest, Hungary, 2009.

⑱ G. Nishida, M. Sugiura, M. Yamakita, B. Maschke, R. Ikeura, Boundary Detection of Variational Symmetry Breaking using Port-Representation of Conservation Laws, The 48th IEEE Conf. on Decision and Control, Shanghai, China, 2009.

⑲ Y. Nishimura, K. Takehara, Y. Yamashita, K. Tanaka, and Y. Wakasa, Stabilization problems of nonlinear systems using feedback laws with Wiener processes, The 48th IEEE Conf. on Decision and Control, Shanghai, China, 2009.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕（計 0 件）

〔その他〕（計 0 件）

６．研究組織

(1)研究代表者

山下　裕（YAMASHITA YUH）
北海道大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：90210426

(2)研究分担者

中村　文一（NAKAMURA HISAKAZU）
奈良先端科学技術大学院大学
・情報科学研究科・助教
研究者番号：70362837

西田　豪　（NISHIDA GOU）
独立行政法人理化学研究所・基幹研究所
・基幹研究所研究員
研究者番号：80435669

西村　悠樹　（NISHIMURA YUKI）
山口大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：20549018
(H21 年度より参加)