様式 C-7-2

自己評価報告書

平成 22 年 4 月 12 日現在

研究種目：若手研究（A）
研究期間：2007～2010
課題番号：19684002
研究課題名（和文）　非線形分散型方程式の初期値境界値問題

研究課題名（英文）Initial and boundary-value problems for nonlinear dispersive equations

研究代表者
中村　誠（NAKAMURA　MAKOTO）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70312634

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：偏微分方程式、非線形、初期値問題、境界値問題、波動方程式

１．研究計画の概要

非線形の分散型方程式と波動方程式の初期値問題と境界値問題において、基本的ではあるが、シンプルな発想で他の方程式への波及効果が大きいと思われる課題を考察する。特に、放物型方程式も含めて分散型方程式と波動方程式の線形評価の構成法のアイデアを再考察し、様々な関数空間を使用して方程式の特性を明らかにしながら、非線形方程式に対する初期値問題と境界値問題を考察する。主な課題として次の (A), (B), (C) の課題を考察する。(A) Wang-Zhao-Guo 空間における初期値問題の適切性。(B) 球対称解と球面調和関数を用いた初期値問題の適切性。(C) 外部問題における時間大域解の存在証明。

２．研究の進捗状況

関数空間と非線形偏微分方程式との関係を調べることを動機の一つとして、モジュレーション空間を用いて非線形偏微分方程式の初期値問題を考察し、非線形熱方程式、ナヴィエ・ストークス方程式、クライン・ゴルドン方程式、シュレディンガー方程式、波動方程式について考察した。また、非線形の熱方程式、複素ギンツバーグ・ランダウ方程式、消散型波動方程式に対して、ソボレフ空間とベゾフ空間における初期値問題の適切性を考察した。ソボレフ空間とベゾフ空間の指数と非線形項の指数は次元解析の観点から最良となるよう非線形項の精密な評価を行った。消散型波動方程式を放物型方程式と同等にエネルギー法の観点から系統的に取り扱う方法を考察した。

Keel-Smith-Sogge 評価式と呼ばれる時空間評価式を考察し、その証明に用いられるホイエンスの原理、修正エネルギーモーメントを用いたエネルギー法、および、調和解析学に基づく平滑化効果の 3 者の相互の関連性について考察した。特に、調和解析の方法を用いて Keel-Smith-Sogge の評価式の一般化を行った。また、非線形の波動方程式の初期値問題に応用して、長時間解と呼ばれる存在時間の極めて長い解の存在、および、時間大域解の存在について考察した。次に、3 次元空間にコンパクトな障害物がある場合の波の伝播を表す非線形波動方程式の外部問題において、障害物の近傍で波の捕捉が生じるような境界近傍で、局所的な消散効果が働く場合に、初期値問題の解の適切性について、長時間解と時間大域解の存在について考察した。時間大域解の存在のためには、非線形項は何らかの構造を持たなければならないことが知られており、その一つとして零条件が挙げられる。本研究では、この零条件を満たす出来る限り一般の非線形項を対象として、時間大域解の存在証明を考察した。

３．現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。
（理由）
マクスウェル・シュレディンガー方程式の初期値問題に対しては、方程式の構造からエネルギー解と呼ばれる解の適切性が問題

となるが、Koch-Tzvetkov 型と呼ばれるストリッカーズ評価を用いると、これまでに知られていたよりエネルギー解に近いクラスで適切性を示すことが出来ることを示した。更に、解は時間大域解であることも示し、学術論文として発表した。非線形波動方程式の外部問題を Keel-Smith-Sogge 型と呼ばれる時空間評価を用いて考察した。各点評価型と呼ばれる波動方程式の解の一様評価と Keel-Smith-Sogge 型評価を組み合わせ、様々な非線形項を扱うことを目指し、研究を行った。障害物が光を捕捉する場合、一般にはエネルギーが減衰しないため、時間大域解の存在は期待できないが、光を捕捉してしまう障害物の境界付近に消散項を付け加えれば、長時間解が得られることを示し、学術論文として発表した。

４．今後の研究の推進方策

(A) に関して、分散型方程式を直接扱うには克服すべき点が表れたため、先に、走化性方程式を考察し、モデルケースを作ることとした。モデルケースが出来あがった後で、再度、分散型方程式を扱う。(A) と (B) に共通して、線形評価と非線形項の評価の二つの評価について考察する。線形評価は、非斉次線形方程式の解と非斉次項の間の関係を表現し、この評価で方程式の持つ性質を深く捉えることで非線形方程式の解の存在証明が系統的に分かることが多い。その方法として、解表示を用いる方法と、方程式の構造を利用するエネルギー法の二つが良く知られているが、本研究では後者の方法に基づいて研究を行う。その理由の一つは、解表示を用いる方法は定数係数の方程式には詳細な解の情報をもたらす一方で、方程式の構造の変形に弱いという点があり、特に、変数係数の方程式への応用を目指して、本質的で応用範囲の広い線形評価の構成方法について考察を行う。(C) に関しては、まず、局所消散項がある非線形波動方程式の初期値問題について、これまで考察してきた空間次元とは異なる空間次元で考察する。また、扱える非線形項の条件の更なる一般化を行う。二つ目の非線形評価に関しては、波動方程式に対して時間大域解の存在証明における零条件と呼ばれる非線形構造が知られているが、より一般化して広い範囲の非線形項を扱うための条件として弱零条件が知られるようになった。この弱零条件は null frame method と呼ばれる波の伝わる光錐に基づいた座標を用いることによって解析される。特に、波動方程式においては解の導関数はエネルギー法により挙動が正確に把握出来る一方で、微分されていない解そのものの評価を行う点で、この null frame method は有効である。この有効性の仕組みについて考察し、これを踏まえて非線形方程式の時間大域可解性と非線形項の関係について考察する。

５． 代表的な研究成果
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

[1] Jason Metcalfe, M. Nakamura, *General quasilinear wave equations with localized dissipation in exterior domains*, Journal of Differential Equations, 233 (2007), 313--344.（査読あり）

[2] M. Nakamura, T. Wada, *Global Existence and Uniqueness of Solutions to the Maxwell-Schrodinger Equations*, Communications in Mathematical Physics, 276 (2007), 315--339. （査読あり）

〔学会発表〕（計１件）

[1]中村誠，非線形波動方程式の外部問題について，日本数学会 2007 年度秋季総合分科会，特別講演，2007 年 9 月 23 日，東北大学.