様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 24 年 4 月 20 日現在

機関番号：11301
研究種目：若手研究（A）
研究期間：2007～2010
課題番号：19684002
研究課題名（和文）　非線形分散型方程式の初期値境界値問題

研究課題名（英文）　Initial and boundary value problems for nonlinear dispersive wave equations

研究代表者
中村　誠（NAKAMURA MAKOTO）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70312634

研究成果の概要（和文）：

波動方程式の重み付きエネルギー評価の一つである Keel-Smith-Sogge 型評価の一般化を行い、高階分散型方程式の初期値問題の適切性を考察した。放物型方程式のエネルギー評価を用いて、冪乗型非線形項を持つ高階放物型方程式の初期値適切性理論を構成した。3 次元空間において臨界的な非線形項を持つ局所消散型波動方程式の外部問題において長時間解を示した。また、非線形項が零条件を満たす場合の時間大域解の存在を示した。

研究成果の概要（英文）：

The well-posedness of the Cauchy problem for higher order dispersive wave equations was considered based on the generalization of the Keel-Smith-Sogge type estimate which is one of the weighted energy estimates for wave equations. The well-posedness of the Cauchy problem for higher order parabolic equations with power type nonlinear terms were constructed by the use of energy estimates for parabolic equations. Almost global solutions for localized dissipative wave equations with critical nonlinear terms were shown in exterior domains in three dimensional Euclidean spaces. And the global solutions were shown when the nonlinear terms satisfy the null conditions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2009 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2010 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
年度			
総　計	8,000,000	2,400,000	10,400,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式

１．研究開始当初の背景

(1) 非線形波動方程式の初期値問題の解法として、ソボレフ空間を利用した方法がある。これは方程式の解のエネルギーが一階のソボレフ空間に対応し、アプリオリ評価による時間大域可解性を示す上で自然な関数空間であることが背景にある。非常に低い微分指数を持つソボレフ空間において初期値問題を考察することは現在の潮流の一つとなっている。初期値の微分可能性が、初期値問題

の適切性と非線形項との関係を表現する一つの指数であることは、1990 年の Cazenave, Weissler による研究によっても良く知られている。一方で、2005 年に Wang, Zhao, Guo は新しい関数空間を利用し、初期値に可微分性を仮定せずに、ある古典的な非線形分散型方程式の初期値問題の適切性を示した。この空間はフーリエ空間において立方体による単位の分解を用いる点で、ペーリー・リトルウッドの単位の分解を用いるソボレフ空間と異なる。彼等は、複素ギンツバーグ・ランダウ方程式、ナヴィエ・ストークス方程式に対する時間局所適切性、および、非線形シュレディンガー方程式、非線形クライン・ゴルドン方程式に対する小さな初期値に対する時間大域適切性を示した。特徴的なことは、この空間の元は可微分性を持つとは限らないにも関わらず、有界関数のルベーグ空間に埋蔵されることであり、この点がこの空間を用いて非線形項を扱う上で有効に働いている。彼等が扱った非線形項は解の導関数を含まない、自然数冪の古典的な非線形項であり、1970 年代にソボレフ空間を用いて行われた非線形分散型方程式に対する考察を行った段階と言える。

(2) 物理的な応用上で考察される非線形波動方程式の一つとして、コンパクトで滑らかな境界を持つ障害物の外部領域における初期値問題、つまり外部問題が挙げられる。数学的な関心では、藤田指数と呼ばれる、全空間での時間大域解の存在のための臨界的な指数を持つ非線形項に対し、波動方程式が外部問題でも時間大域解を持つかどうかは大変興味深い問題である。この研究に関しては 2002 年以降、Keel, Smith, Sogge, Metcalfe を中心として大きな進展があった。彼等は、空間 3 次元において典型的で臨界的な非線形項を持つ準線形波動方程式に対し、ディリクレ条件の下で、外部問題における時間大域解の存在を示した。特に、彼等が示した Keel-Smith-Sogge 型の重み付きエネルギー評価は対数関数をその係数を持つ点で臨界的であり、実際に非線形問題への応用に際して、時間局所解と時間大域解への境界である長時間解を生成する点で画期的と言える。

２．研究の目的

非線形の波動方程式および分散型方程式の初期値問題と境界値問題において、次の (1), (2) の課題を考察する。また、手法に汎用性がある場合に関連する放物型方程式を考察し、統一的手法の構築を試みる。以下、適切性とは、解の存在、一意性、初期値への連続依存性を表す。

(1) 関数空間の位相構造と非線形偏微分方程式の初期値問題との関連性を明らかにする。ベゾフ空間を用いて解の正則性と非線形項の増大数との関連を考察する。また、モジュレーション空間の実解析的な性質の研究を通して、Wang, Zhao, Guo 等の結果を拡張する。特に、彼等が扱えなかった空間次元と非線形項に対して初期値問題の適切性を示すと共に、適切性の問題が臨界になる場合についても考察する。

(2) Keel-Smith-Sogge 型重み付きエネルギー評価を用いた外部問題の研究。Keel-Smith-Sogge 型の重み付きエネルギー評価についてその有効性が何処からもたらされるかを明らかにすると共に、他の偏微分方程式に対するエネルギー評価との関連について調べると共に非線形分散型方程式への応用を考察する。

３．研究の方法

下記の研究成果それぞれについての研究方法について記述する。ただし、(8)以降は現時点で未発表のため省略する。

(1)冪乗型非線形項を持つ偏微分方程式の初期値問題では、ベゾフ空間を用いた縮小写像の原理が基本的な解法の一つである。しかし、非線形項がハートリー型のような非局所的な効果を持つ場合にはソボレフの埋蔵定理が縮小写像の枠組みでは利用できないため、本研究ではストリッカーツ評価の拡張と Gagliardo-Nirenberg 型補間不等式を使用する。

(2)と(6)波動方程式の外部問題において捕捉的な障害物を扱う一つの方法は、捕捉的な境界近傍において消散効果を持たせることである。これにより局所エネルギー減衰が期待され、カットオフの議論により問題を障害物がない場合へと帰着して考察することが出来る。局所エネルギー減衰評価として中尾氏が示した評価を使用し、線形評価は Keel, Smith, Sogge が示した評価を使用する。非線形項の各点評価については、Klainerman, Sideris, 久保田氏と横山氏によるものに基づく。

(3)波動方程式に対する Keel-Smith-Sogge 型重み付きエネルギー評価は、放物型方程式に対する通常のエネルギー評価から生じる二乗型時空間評価に相当する。この点に着目して、冪乗型非線形放物型方程式に対して、波動方程式に対する H^s 理論に対応した理論を構成する。非線形項の評価は申請者がベゾフ空間において過去に構成したものを使用する。

(4)空間 3 次元において示された波動方程式に対する Keel-Smith-Sogge 型重み付きエネルギー評価の調和解析を用いた別証明を考察すると、多次元かつ高階ラプラシアンの場合の分散型方程式が扱えることが分かる。この点に着目し、非線形高階分散型方程式の非線形問題を考察する。

(5)マクスウェル・シュレディンガー方程式はクーロンゲージ下では波動方程式とシュレディンガー方程式の連立系となるが、非線形性が複雑なため低階ソボレフ空間での大域解を得ることは難しい。本研究では通常のストリッカーツ評価に改良を加えた Koch-Tsvetkov 型のものを使用することにより大域解の構成を試みる。
(7) 波動方程式の球対称解については、エンドポイント型と呼ばれるストリッカーツ評価が成り立つことは既に知られている。球対称でなくとも角変数について正則性がある関数の場合には成り立つことも著者達の研究によって示されている。この結果を用いて自己相似型の非線形項を持つ波動方程式を考察し、時間大域解の存在を示す。

４．研究成果

(1) ハートリー型の非局所的な非線形項を持つディラック方程式の初期値問題において小さいデータに対する散乱理論を示した。前許容対に対するストリッカーツ型評価と呼ばれる線形評価を用いることにより、散乱理論が構成出来るために既存で知られていた非線形項の度数と非線形項の非局所化の指数の間の関係を改良した(雑誌論文(1))。
(2) 局所消散型波動方程式の外部問題における時間大域解の存在証明について考察を行った。時間大域解の存在のためには、非線形項は何らかの構造を持たなければならないことが知られており、その一つとして零条件が挙げられる。この零条件を満たす出来る限り一般の非線形項を対象として、時間大域解の存在を証明した(雑誌論文(2))。
(3) 高階ラプラシアンを含む熱方程式、複素ギンツバーグ・ランダウ方程式、消散型波動方程式に対して、波動方程式と分散型方程式におけるストリッカーツ評価と呼ばれるものに対応する線形評価を構成すると共に非線形方程式へ応用し、ソボレフ空間とベゾフ空間における初期値問題の適切性を考察した。ソボレフ空間とベゾフ空間の指数と非線形項の指数は次元解析の観点から最良となるよう非線形項の精密な評価を行い、所謂 H^s 理論と呼ばれる理論が構成出来ることを示し、学術論文として発表した(雑誌論文(3))。
(4) 3 次元空間において波動方程式を考えた場合、ホイエンスの原理を利用してエネルギー評価を改良することにより Keel-Smith-Sogge の評価式と呼ばれる線形評価を得ることが出来る。その証明は基本解の評価における球面特異性を使うことから、他次元への一般化はこの方法では出来る見込みが低い。そこで、調和解析の方法を用いて Keel-Smith-Sogge の評価式の一般化を行った。また、非線形の波動方程式の初期値問題に応用して、長時間解と呼ばれる存在時間の極めて長い解の存在、および、時間大域解の存在について考察し、学術論文として発表した(雑誌論文(4))。
(5) マクスウェル・シュレディンガー方程式の初期値問題は、方程式の構造からエネルギー解と呼ばれる解の適切性が問題となるが、Koch-Tzvetkov 型と呼ばれるストリッカーズ評価を用いることにより、これまでに知られていたよりエネルギー解に近いクラスで適切性を示した。更に、解は時間大域解であることも示し、学術論文として発表した(雑誌論文(5))。
(6) 非線形波動方程式の外部問題を Keel-Smith-Sogge 型と呼ばれる時空間評価を用いて考察し、各点評価と呼ばれる波動方程式の解の一様評価と Keel-Smith-Sogge 型評価を組み合わせて様々な非線形項を扱うことを目指して研究を行った。障害物が光を捕捉する場合、一般にはエネルギーが減衰しないため、時間大域解の存在は期待できないが、光を捕捉してしまう障害物の境界付近に消散項を付け加えれば、長時間解が得られることを示し、学術論文として発表した(雑誌論文(6))。
(7) 非線形波動方程式の自己相似解を考察した。自己相似解の構成の上で、ストリッカーツ評価と呼ばれる方程式の線形評価が重要となる。本研究では球面調和関数を用いることにより、ストリッカーツ評価に角変数の微分可能性についても評価指数として取り入れ、高い空間次元での自己相似解の存在を示した。付録として、非負実数の指数を持つソボレフ空間での非線形項の評価である球面上での Moser タイプの不等式を Triebel-Lizorkin 空間を使って示している(雑誌論文[7])。
(8) 関数空間と非線形偏微分方程式との関係を調べることを動機の一つとして、ソボレフ空間とはフーリエ空間における単位の分解が異なるモジュレーション空間を用いて、非線形偏微分方程式の初期値問題を考察した。非線形熱方程式、ナヴィエ・ストークス方程式、クライン・ゴルドン方程式、シュレディンガー方程式、波動方程式について考察した。本研究結果の一部は岩渕司氏との共著として投稿中である。
(9) 特異性のある重みを持つルベーグ空間において Moser-Trudinger の不等式の最良定数を考察した。応用として指数関数型非線形項を持つクライン・ゴルドン方程式の初期値問題を考察し、エネルギークラスでの時間局所解、および、保存則が成り立つ場合の時間大域解の存在を示した。研究

結果の一部は石渡通徳氏と和田出秀光氏との共著として投稿中である。
(9)アインシュタイン方程式の初期値問題を考察した Lindblad と Rodnianski の論文において用いられた調和座標と Null frame method について、および、一般の変数係数の準線形波動方程式の初期値問題への応用について考察した。本研究の一部を講義録として発表した(図書(2))。
(10) 微分型非線形項を持つシュレディンガー方程式を2次元空間において考察し、初期値問題における時間大域解の適切性理論について研究を行った。2008年に T. Ozawa と J. Zhai は上記問題を3次元以上の空間で示したが、その際にストリッカーツ評価と呼ばれる時空間評価の有用性を示す方法が用いられた。その方法の延長では2次元空間はストリッカーツ評価のエンドポイントと呼ばれる破綻してしまう臨界点評価に相当する。本研究ではこの臨界的な状況とシュレディンガー方程式の平滑化効果との関連性を調べ、ベクトルフィールドの方法と呼ばれる手法により回転微分も新たに考察することで2次元空間における問題を考察した。
(11) マクスウェル･シュレディンガー方程式については、Bejenaru と Tataru が示したエネルギークラスでの時間大域可解性を参考にして、分散型方程式に対するフーリエ空間における単位の分解法について考察した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

(1) M. Nakamura, K. Tsutaya, Scattering theory for the Dirac Equation of Hartree type and the semirelativistic Hartree equation, Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications, **75**(2012), 3531-3542.(査読有)
(2) M. Nakamura, Global solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, Journal of Differential Equations, **252** (2012), 4742-4785. (査読有)
(3) M. Nakamura, *Small global solutions for nonlinear complex Ginzburg-Landau equations and nonlinear dissipative wave equations in Sobolev spaces*, Reviews in Mathematical Physics, **23**(2011), 903--931. (査読有)
(4) M. Nakamura, Remarks on Keel-Smith-Sogge estimates and some applications to nonlinear higher order wave equations, Differential and Integral Equations, **24** (2011), 519--540. (査読有)
(5) M. Nakamura, T. Wada, *Global Existence and Uniqueness of Solutions to the Maxwell-Schroedinger Equations*, Communications in Mathematical Physics, **276**(2007), 315--339. (査読有)
(6) J. Metcalfe, M. Nakamura, *General quasilinear wave equations with localized dissipation in exterior domains,* Journal of Differential Equations, **233**(2007), 313--344. (査読有)
(7) J. Kato, M. Nakamura, T. Ozawa, *A generalization of the weighted Strichartz estimates for wave equations and an application to self-similar solutions*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **60**(2007), 164--186. (査読有)

〔学会発表〕（計５件）

(1) M. Nakamura, *On global solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations*, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学.
(2) M. Nakamura, *On Keel-Smith-Sogge estimates and some applications*, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学.
(3) M. Nakamura, K. Tsutaya, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Dirac equation of Hartree type*, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月24日, 名古屋大学.
(4) M. Nakamura, *General quasilinear wave equations with localized dissipation in exterior domains*, The 7th AIMS International Conference, University of Texas at Arlington, 2008年5月21日, Arlington, USA.
(5) M. Nakamura, 非線形波動方程式の外部問題について, 日本数学会 2007年度秋季総合分科会, 特別講演, 2007年9月23日, 東北大学.

〔図書〕（計２件）

(1) 中村誠, 「Einstein 方程式の初期値問題」, 講義録, 2009年7月発行, 31ページ.
(2) 中村誠, 「非線形波動方程式の外部問題について」, 日本数学会, 2007年度秋季総合分科会, 函数方程式論分科会, 講演アブストラクト, 特別講演, 2007, 150-157.

６．研究組織
(1)研究代表者

中村　誠 (NAKAMURA MAKOTO)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70312634

(2)研究分担者
(　　)
研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)
研究者番号：