様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年４月３０日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２００７～２００８
課題番号：１９７０００１
研究課題名（和文）グラフのラベリングアルゴリズムと有向グラフへの拡張及び分散アルゴリズムへの応用
研究課題名（英文）Labeling algorithm for graphs and digraphs, and its applications to distributed algorithm in networks
研究代表者
荒木　徹　（ARAKI TORU）
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：４０３６１０４２

研究成果の概要：グラフの L(2,1)ラベリングと、その一般化についての数学的研究を行った。これは無線ネットワークの周波数割り当て問題を，数学的にモデルかしたものである．その結果として、chain graph や bipartite permutation graph と呼ばれるグラフの最適解、または近似解を求める効率のよいアルゴリズムを設計することができた。これらの結果は、国際会議と学術論文誌に掲載された。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,100,000	0	1,100,000
２００８年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,800,000	210,000	2,010,000

研究分野：総合領域
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：グラフアルゴリズム、ラベリング、組み合わせ最適化

１．研究開始当初の背景

無線ネットワークにおいて、利用する電波が干渉しないように周波数を割り当てる問題がある。これを数学的にモデル化した問題が知られているが、効率のよいアルゴリズムを設計することは困難であることが知られている。無線ネットワークでは，ネットワーク上の各ノードが無線通信を使用して他のステーションと通信を行う．ネットワークを効率よく運用するためには，各ステーションが通信で利用する周波数域を互いに干渉しないように割り当てることが重要となる．このような問題はチャネル割り当て問題と呼ばれており，関連する多くの研究が発表されている．

本研究は，無線ネットワークのチャネル割り当て問題を解くアルゴリズムについての理論的研究である．

無線ネットワークはグラフによって自然な形でモデル化でき，チャネル割り当て問題はグラフのある種の彩色問題として考えることができる．この問題はL(h,k)ラベリング問題または radio-coloring 問題として知られており，Giggs and Yehの論文“Labelling graphs with a condition at distance two”（1992）をきっかけとして，現在に至るまで数多くの成果が発表されている．同時に，この問題は一般に計算困難（NP完全）となることが証明された．本研究では，多項式時間でラベリング問題を解くグラフのクラスを明らかにすることが第一の目的である．

グラフのL(h,k)ラベリングとは，グラフの各頂点vに以下の条件を満たすように非負整数 f(v)を割り当てる問題である：（１）u, vが隣接するなら$|f(u)-f(v)|\geq h$，（２）u, v間の距離が2なら$|f(u)-f(v)|\geq k$．各頂点のラベルf(v)が，ノードが通信に利用する無線チャネルに対応し，ラベルの条件は，干渉が発生しないための条件に対応する．与えられたグラフをラベリングするために必要なラベルの最大値$\max f(v)$（ここではラベル数とよぶ）を最小化することが目的となる．この問題は通常のグラフの彩色問題を拡張したものといえる．

アルゴリズムを設計するためには，まず与えられたグラフをラベリングするために必要なラベル数の上界を明らかにしなければならない．Giggs and Yeh により任意のグラフのラベル数の上界はΔ^2を越えないと推測されている（Δ はグラフの最大次数）．この推測を証明することがラベリング問題の研究における一つの大きな流れである．また，平面グラフやその部分クラス（外平面グラフ，直並列グラフなど）に対しては，ラベル数が$O(\Delta)$となることが証明されている．

グラフが与えられたとき，頂点にラベルを与えるアルゴリズムは，一般に NP 困難である．しかし，対象とするグラフを限定することにより，多項式時間で最適または最適に近いラベリングを与えるアルゴリズムがいくつか知られている．例えば木[Chang and Kuo, Fiala ら]，外平面グラフ[Calamoneri]，matrogenic graph[Calamoneri and Retreschi]などである．

また有向グラフの構造を考える問題は，これまで応募者が研究の中で中心的に取り組んできた問題の一つである．ラベリング問題を発展させる一つの方向として，対象のグラフを有向グラフとすることは問題の自然な拡張であり，今後の新しい研究の流れになると考えている．

２．研究の目的

さまざまなグラフに対して，L(h,k)ラベリング問題を解くアルゴリズムを設計する．
本研究の内容は次の三つに分類される．

（１） ラベリングアルゴリズムの設計

構造を制限したグラフ（例えば平面グラフ，パーフェクトグラフなど）やある種の構成法（グラフ演算など）から得られるグラフに対して，最適なラベリング数の上界を求めたい．またラベリングを与える多項式時間アルゴリズムを設計したい．

（２） 有向グラフのラベリング

対象のグラフを有向グラフへ拡張する．これはYehによって提案された問題である（A survey on labeling graphs with a condition at distance two, 2006）．有向グラフとは，グラフの各辺に向きがあるグラフである．これは通常のグラフ，いわゆる無向グラフと距離についての扱いが大きく異なる．本研究で考えているL(2,1)ラベリングは，距離が2の頂点間に異なるラベルを割り当てることが必要であり，そのためグラフの構造とラベリングの上界，下界も現在のところ求めることができていない（無向グラフにはほぼ自明な上界と下界が存在する）．

そこで，まず対象のグラフを構造が単純なものに限定して，ラベリングの上界・下界を求める．そして最適解または近似解を求めるアルゴリズムを設計する．

（３） 自己安定分散アルゴリズムの設計

ラベリング問題を解く自己安定分散アルゴリズムを設計したい．すなわち，ネットワーク上の各ノードが隣接ノードとの通信によって，各自のラベル（通信チャネル）がL(h,k)ラベリングの条件を満たすように，自立的に決定するアルゴリズムを考える．

グラフのラベリング問題を解くアルゴリズムに関しては，すでに多くの研究が行われている．本研究では，対象のグラフを有向グラフへと拡張する（これは従来のグラフを含んだ形での拡張である）．また通常の意味でのアルゴリズムは研究されているが，分散アルゴリズムを考えることも本研究の特色である．

３．研究の方法

周波数割り当て問題を数学的にモデル化し、グラフ上の最適化問題へと定式化する。この問題はL(2,1)ラベリング問題として知られている。これまでの研究で、対象のグラフを限定しても多項式時間アルゴリズムを設計することが困難であることが知られているため、本研究では、非常に構造の制限が強いグラフを対象にして、最適解もしくは近似解を求める多項式時間アルゴリズムを設計する。特に，アルゴリズムの設計しやすいグラフのクラスとしてパーフェクトグラフと呼ばれるものがある．これらをグラフを対象として研究はすでに数多く発表されているが，本研究でもそれらのグラフを対象とする．特にpermutation graphと呼ばれるグラフは，比較的単純な考察によるラベリングアルゴリズムしか知られていないため，このグラフを考察の対象とする．

また，本研究では，対象のグラフを有向グラフへ拡張する．有向グラフでのこの問題の成果は，現在のところ木に対する結果が発表されているのみである．ここでは，以下のグラフについて考察する．

- Cayleyグラフ
- グラフ演算
- ラインダイグラフ演算
- グラフの積
- 非循環グラフ（DAG）

ラベリング問題を有向グラフへ拡張した場合，通常の（無向）グラフで用いられている手法が，多くの場合利用できなくなることが予想される．例えば，通常はラベル数の下界はグラフの最大次数で与えられるが，有向グラフでは同じようなことは言えない．そこで，まずはアルゴリズムを設計しやすい有向グラフのクラスをいかに限定するかが問題となる．Cayleyグラフやグラフ演算を用いて構成される有向グラフは，相互結合網として良い性質を持つことが知られている．

４．研究成果

対象とするグラフをBipartite permutation graphと呼ばれるクラスに限定し、その上で最適、もしくは最適解に近い解を求める線形時間アルゴリズムを設計することができた。具体的には，Bipartite permutation graphにおけるL(2,1)ラベリング問題を解くアルゴリズムについて考察した．Bipartite permutation graphの特殊なケースであるchain graphでは，このアルゴリズムは最適なラベリングを線形時間で求めることができる．またbipartite permutation graphに対しては，最大ラベルの最適解をXとすると，最大のラベルがたかだかX+1となるラベリングを出力する．そしてその計算時間はO(|V|+|E|)である．これまでの研究成果の中で，最適解を多項式時間で求めることができるグラフのクラスは非常に限られており，今回の成果でそのようなグラフを新しく発見できたことは意義のある結果である．この成果は昨年度の国内研究会，および国際会議で発表した．

またそれをより一般化し、Bipartite permutation graphのL(p,q)ラベリング，$p \geq q \geq 1$，を求める問題へ拡張した．この問題は以前の問題を完全に含んでいる．この場合でもchain graphに対する最適解は線形時間で求めることができる．またbipartite permutation graphの場合は，最適解に対し最大のラベルの差が高々$p-1$のラベリングを求めることができる．このアルゴリズムの計算時間もやはりO(|V|+|E|)となる．この結果は国際論文誌に投稿、採録となった。

本研究の目的であった有向グラフのラベリング問題については，有向サイクルの積であるグラフのL(2,1)ラベリングについて考察した．これについては，最適解の上界を求めることができた．この成果は残念ながら現在のところ未発表であるが，近いうちに発表する準備は整った．有向グラフを対象としたラベリング問題は最近いくつか発表されてきており，今後発展する可能性があると考えている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

1. T. Araki, Labeling bipartite permutation graphs with a condition at distance two, Discrete Applied Mathematics, vol. 157, no. 8, pp. 1677-1686, 2009.査読有

2. T. Araki, The k-tuple twin domination in de Bruijn and Kautz digraphs, Discrete Mathematics, vol. 308, pp. 6406-6413, 2008.査読有

〔その他〕
ホームページ

http://www.mais.cs.gunma-u.ac.jp/arakit/

６．研究組織
(1)研究代表者
荒木　徹（TORU ARAKI）
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：４０３６１０４２