

平成22年 3月31日現在

研究種目：若手研究 (B)  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19730539  
 研究課題名 (和文) 高等学校における創造的・問題解決的な数学の授業の実証的研究  
 研究課題名 (英文) Empirical Study on the Teaching via Problem Solving in High School Mathematics  
 研究代表者  
 岩田 耕司 (IWATA KOJI)  
 島根大学・教育学部・准教授  
 研究者番号：90437541

研究成果の概要 (和文)：本研究では、主として「三角関数の加法定理」および「正弦定理」の学習に焦点を当て、高等学校における創造的・問題解決的な数学の授業の具体について検討した。その結果、生徒の活動の実態や困難性の所在を踏まえ、授業で扱う教材や教師による支援の在り方を検討することで、高等学校における問題解決指導は可能であり、そのような授業を通して数学を学習した生徒は、そうでない生徒よりも、数学や数学の授業に対し肯定的な回答を示す傾向が強く、学習内容が定着していると判断できる生徒の割合が高いことが分かった。

研究成果の概要 (英文)：The purpose of this study is to examine the teaching via problem solving in high school mathematics, mainly focused on the learning of “Addition Theorems of Trigonometric Functions” and “Sine theorem”. As a result, it has been understood that the students who studied through such classes tend to show an affirmative response to the mathematics and high performance in the maintenance test implemented after lessons.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	400,000	120,000	520,000
2009年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	240,000	1,940,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：科学教育, 数学教育, 問題解決, 高等学校, 実践研究

## 1. 研究開始当初の背景

物的資源の乏しい我が国においては、諸外国以上に科学技術の発展が重要であり、人間の知的創造力が最大の資源になるとの考えのもと、自ら学び自ら考える力や創造性の基

礎となる力の育成を目指した教育の必要性や重要性が叫ばれてきた。数学教育において、そのような教育理念を表すものの一つに、問題解決学習<sup>1)</sup>が挙げられる。

しかしながら我が国では、そのような問題

解決学習の重要性や有効性を認める教師は多いものの、実際の教育現場、特に高等学校の数学の授業においては、そのような学習があまり実践されていないという現状が報告されている<sup>2)</sup>。また、国際数学・理科動向調査の2003年調査(TIMSS 2003)の結果からも、「わが国は、数学の授業での問題解決活動はいずれも国際平均値より低く、しかも、国際的に最も低いレベルにある」<sup>3)</sup>ことが指摘されている。

このような現状の背景には、大学入試や授業時間数の問題があることは言うまでもない。しかしながら、問題解決型の学習が、特に高等学校において根付いていない現状を踏まえると、その根底には、少なからず高等学校固有の問題が潜んでいるように思われる。例えば、学習内容の抽象度や難易度が上がることによる、生徒の自力解決の難しさや、教師による支援の難しさである。

他方、数学教育学における問題解決に関する研究の知見に目を向けてみると、生徒の自力解決を助けるための一つの方法として、Pólyaの指摘<sup>4)</sup>に端を発する数学的問題解決ストラテジー(以下、ストラテジーと略記)の研究が国内外を問わず、幅広く行われてきた。しかしながら、これらの研究の多くは、あくまで数学的問題解決という文脈で、ストラテジーやその指導、その効果を探究するものであり、「方法型」の問題解決指導<sup>5)</sup>における支援の方法としてのストラテジーについて探究するものはあまり見られない。

それゆえ、高等学校の具体的な学習内容を想定し、その学習における生徒の自力解決を助けるような支援の在り方について、ストラテジーによる支援を含め実証的に研究しているものは少なく、高等学校における問題解決的な数学の授業をどのように展開すればよいか不明確な点が多いという現状がある。

## 2. 研究の目的

以上のような認識のもとに、本研究では、次の3点を明らかにすることを通して、高等学校における創造的・問題解決的な数学の授業の具体を提案することを目的としている。

(1) 授業実践の対象となる学習内容について、高等学校数学科教科書が想定している教授・学習方法を明らかにする。

(2) 量的・質的調査を通して、各学習内容に初めて取り組む生徒の「活動の実態」や「支援による活動の変化」および「困難性の所在」を明らかにする。

(3) 調査結果に基づき、各学習内容の「授業構成」と、教師による「支援の方法」を検討し、授業実践を通して、「生徒の理解度」や「学習内容の定着度」、「授業構成の適切性・妥当性」を検証する。

## 3. 研究の方法

本研究の方法は、次の3つに大別できる。

### (1) 教科書分析・文献解釈

授業実践の対象となる学習内容について、高等学校数学科の検定済み教科書9社分を分析し、新たな数学的概念や法則を導入する際の各教科書の取り扱い(内容や配列、動機づけ、設問構成等)を明らかにする。

また、指導書や他の関係する文献等の解釈を通して、用いる教材や授業構成を検討し、調査計画を立てる。

### (2) 質的・量的調査

①予備調査:当該内容に関する被調査者の既習知識の習得状況や、在籍する学校・学年におけるクラス間の差を調べるための予備調査を実施し、本調査に係る実施上の留意点を明らかにする。

②本調査1(量的調査):予備調査の結果に基づき、ある学習内容に初めて取り組む生徒の「活動の実態」や「支援による活動の変化」、「陥りやすい誤った活動の方向性」を調べるための質問紙による量的な調査を実施する。その際、被調査者を、問題や問題の提示方法の異なる幾つかの群に分け、それらの群間における活動の違いを分析する。また、その結果から、ある学習内容に初めて取り組む生徒の活動の様相を分類、整理する。

③本調査2(質的調査):生徒の困難性の所在や、問題や問題の提示方法の違いによる活動の変化をさらに詳細に分析するために、インタビュー方式による質的な調査を実施する。

### (3) 授業実践による実証的研究

上記(1)、(2)の結果をもとに、教師による支援の方法を仮説的に設定し、授業実践を通して、生徒の理解度、学習内容の定着度、授業構成の適切性・妥当性について検証する。生徒の理解度や学習内容の定着度については、授業後のアンケートと、1ヶ月後の事後テストによって検証する。また、授業構成の適切性・妥当性については、VTRによって記録され、プロトコルに起こされた授業の様子と授業後のアンケート結果とを併せて分析することで検証する。

また、異なる被験者や授業者による授業実践を行い、授業構成の適切性・妥当性について再度、検証を行う。

## 4. 研究成果

本研究では、主として高等学校数学II「三角関数の加法定理」、および、高等学校数学I「正弦定理」の学習に焦点を当て研究を進めた。主要な成果は、以下の諸点である。

(1) 高等学校数学II「三角関数の加法定理」の教授・学習過程に関する知見

①現在、高等学校で採用されている数学IIの教科書(平成15年検定,9社20種)を分析した結果、各教科書で採用されている証明

方法には大きく4つの方法があり、それぞれの方法にはそれぞれのよさがあるものの、それらの証明を中心に問題解決的な授業展開を図るには、証明に用いる図の複雑さや、活動の目的と解決過程とが整合していない等の問題点があることが分かった。

②三角関数の加法定理に関する質問紙調査を通して、三角関数の加法定理の証明は、生徒にとって自力で解決するには難しい問題であり、ストラテジーや図の提示による支援によって何らかの証明を示す生徒は若干増えたものの、その効果は限定的であり、どちらも不十分であること、さらには、図を提示した方が生徒にとって考えやすいとは必ずしも言えないということが分かった。

③また、インタビュー調査を通して、その困難性の背景には、取り組もうとする問題に対する理解や、 $\cos(\alpha - \beta)$ の表し方に対する柔軟な見方などの要因があることを明らかにした。その結果、加法定理の証明において教師は、図を描いてみようとする指示や、図を提示したりすることよりも、問題の意味や目的を正しく認識させることに十分な時間を費やすべきであるという示唆を得た。また、三角関数の加法定理の証明に固有な困難性としての、 $\cos(\alpha - \beta)$ の表し方に対する柔軟な見方や、座標が三角関数で表されている点について、その二点間の距離を求めることを支援することも、授業を展開する上で重要な局面となりうることを示した。

④上記②、③の結果を基に、三角関数の加法定理の導入授業における支援の方法を仮説的に設定し、授業実践を通してその効果や妥当性について検証した結果、本研究で仮説的に設定した支援の方法は、授業を問題解決的に展開する際の控えめな支援として有効に機能していたことが分かった。特に、三角関数の加法定理について、特殊な場合から問題を一般化するという過程や、証明に用いる図について全体で議論する場を取り入れたことが有効であったことが分かった。

(2) 高等学校数学I「正弦定理」の教授・学習過程に関する知見

①現在、高等学校で使用されている数学Iの教科書(平成18年検定, 8社21種)を分析した結果、各教科書で採用されている証明方法は3つの方法に大別でき、その証明過程は、内包的一般化と外延的一般化という2つの一般化が繰り返される複雑な過程であることが分かった。このことは、正弦定理の教授・学習に対し、一般化に関する教授学的理論が有効な示唆をもたらすことを意味する。

②一般化の全体像と、その本質的な過程を明らかにするDörflerの一般化モデル<sup>6)</sup>に基づき、正弦定理の証明過程を分析した結果、正弦定理の証明(一般化)における「活動の不変項」と「活動の体系」を同定することがで

きた。具体的には「三角形の一辺とその対角の大きさが決まれば、外接円が一意に決まる」という関係を「活動の不変項」とし、「線分BCの上側に $\angle A$ が等しい $\triangle ABC$ を多数かく」という作業を、出発の状況における「活動の体系」とすることで、正弦定理の学習を問題解決的に展開できる可能性を示した。

③上記②の知見に基づき、正弦定理の導入授業を設計し、授業実践を通してその効果や妥当性について検証した。その際、本研究で設計した授業を通して正弦定理を学習するクラス(実験群)と、主として教科書に沿って正弦定理の学習を進めるクラス(対照群)とに分けて授業を実施した結果、例えば授業後のアンケートにおける「今後も、数学の授業の中で、公式を自分でつくったり、きまりが成り立つ理由を自分で考えたりしたいと思いますか」という問いや「これまでの授業を通して、この式の意味やよさを理解することができましたか」という問いに対しては、実験群と対照群との間に大きな回答傾向の違いが見られた。 $\chi^2$ 検定の結果、このような回答傾向の違いは、前者については5%水準で( $\chi^2=6.609$ ,  $df=2$ )、後者については1%水準で( $\chi^2=14.173$ ,  $df=3$ )有意であり、実験群の方が対照群よりも、より肯定的な回答を示す傾向があることが分かった。

④また、1ヶ月後に実施した正弦定理の証明に関する事後テストの結果から、対照群の生徒は、実験群と比べ、特に鈍角、直角の場合について適切な証明を記述することができておらず、 $\chi^2$ 検定の結果、鈍角については5%水準( $\chi^2=5.380$ ,  $df=1$ )で、直角については1%水準( $\chi^2=9.066$ ,  $df=1$ )で有意な差が見られた(表1を参照のこと)。

表1. 正弦定理の事後テストの結果

	実験群 (n=36)			対照群 (n=40)		
	鋭角の場合	鈍角の場合	直角の場合	鋭角の場合	鈍角の場合	直角の場合
直径を補助線	50.0% (18)	22.2% (8)	—	60.0% (24)	17.5% (7)	—
半径を補助線	30.6% (11)	19.4% (7)	—	5.0% (2)	0.0% (0)	—
合計	80.6% (29)	41.7% (15)	50.0% (18)	65.0% (26)	17.5% (7)	17.5% (7)

また、鋭角、鈍角、直角それぞれの場合に対する適切な証明を全て記述することができていた生徒の割合は表2の通りであり、実験群の割合は、対照群と比べ1%水準で有意に高いことが分かった( $\chi^2=7.439$ ,  $df=1$ )。

表2. 正弦定理の事後テストの完全正答率

	実験群 (n=36)	対照群 (n=40)
完全正答率	36.1% (13)	10.0% (4)

(3) 高等学校数学I「正弦定理」の教授・学

習過程に関する再検証の結果について

本研究では、前項(2)の授業実践とは異なる被験者や授業者による授業実践を行い、その効果や妥当性について再度、検証を行った。その主要な知見は、以下の点である。

①授業前に実施した質問紙調査における「数学の授業で、公式やきまりを習うとき、なぜそうなるかは自分たちで考えたいですか」という質問項目に対し、肯定的な回答を示した生徒は4割に満たなかった。しかしながら、授業後に実施した質問紙調査においては、「今後も、数学の授業の中で、公式を自分でつくったり、きまりが成り立つ理由を自分で考えたりしたいと思いませんか」という質問項目に対し、8割以上の生徒が肯定的な回答を示した。他の授業内容の理解や自ら考えることに関する質問項目に対しても、ほぼ8割から9割の生徒が肯定的な回答を示しており、これらの結果は、前年度とは異なる被験者や授業者による授業実践であったにも関わらず、前年度とほぼ同じ割合であった。

②授業実践の1ヶ月後に実施した、正弦定理の証明に関する保持テストにおいては、鋭角の場合について適切な証明を再現できた生徒の割合は、前年度とほぼ同様8割程度であったが、鈍角や直角の場合については5割を下回る結果となった。このことは、我々の想定した導入課題(教材)は、正弦定理の一般化のプロセスにおける「活動の不変項」を内包し、活動の動機付けを与える出発の状況としての機能を果たした一方で、鈍角や直角の場合に拡張する外延的一般化の段階では、十分に機能していないことを意味している。

#### (4) 研究の総括と今後の課題

本研究では、主として「三角関数の加法定理」および「正弦定理」の学習に焦点を当て、高等学校における創造的・問題解決的な数学の授業の具体について検討してきた。その結果、生徒の活動の実態や困難性の所在を踏まえ、授業で扱う教材や教師による支援の在り方を検討することで、高等学校における問題解決指導は可能であり、そのような授業を通して数学を学習した生徒は、そうでない生徒よりも、数学や数学の授業に対し肯定的な回答を示す傾向が強く、学習内容が定着していると判断できる生徒の割合が高いことが分かった。また、そのような授業を検討していく中で、特に、問題理解(把握)の場面における教師の役割が極めて重要であることも示唆された。

今後は、中学校や高等学校におけるより多くの学習内容に対する創造的・問題解決的な数学の授業の具体を明らかにするとともに、特に、授業の核となる問題や問題理解の場面における教師の役割についてより詳細に検討していく必要があると考える。

引用・参考文献

- 1) Schroeder, T. L. & Lester, F. K. J. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In P. R. Trafton (ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 31-42). NCTM.
- 2) 室岡和彦 (2006). 中学・高校数学の改善に向けて—調査結果等から学ぶもの—. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 88(7), 16-22.
- 3) 国立教育政策研究所(編, 2005). 『TIMSS 2003 算数・数学教育の国際比較 国際数学・理科教育動向調査の2003年調査報告書』. ぎょうせい. p. 117.
- 4) Pólya, G. (1957). *How to Solve It (2nd Edition)*. Princeton University Press.
- 5) 石田忠男・川寄昭三 編著(1987). 『算数科問題解決指導の教材研究』. 明治図書.
- 6) Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. In Alan J. Bishop et al. (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

①岩田耕司, 服部裕一郎, 高等学校数学における方法型の問題解決指導に関する調査研究—三角関数の加法定理に焦点をあてて—, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第14巻, 153-166頁, 2008, 査読有.

[学会発表] (計2件)

①岩田耕司, 服部裕一郎, 高等学校における問題解決的な数学の授業の検討(3)—Dörflerの一般化モデルに基づく「正弦定理」の授業実践—, 全国数学教育学会 第29回研究発表会, 2009年1月25日, 姫路市立教育研究所.

②岩田耕司, 服部裕一郎, 高等学校における問題解決的な数学の授業の検討(2)—三角関数の加法定理の授業実践を通して—, 全国数学教育学会 第26回研究発表会, 2007年6月24日, 広島大学大学院教育学研究科.

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩田 耕司 (IWATA KOJI)

島根大学・教育学部・准教授

研究者番号: 90437541

(2) 研究協力者

服部 裕一郎 (HATTORI YUICHIRO)  
広島大学附属福山中・高等学校・教諭