**様式 C-19**

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年４月１日現在


機関番号：１２５０１
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２００７ 〜 ２０１０
課題番号：１９７４０００５
研究課題名（和文）　有限群の部分群複体とそこから導かれる表現と幾何の研究

研究課題名（英文）　Subgroup complexes of finite groups, and their representation and geometry



研究代表者
澤邉　正人　（ SAWABE MASATO ）
千葉大学・教育学部・准教授
研究者番号：６０３４６６２４



研究成果の概要（和文）：
有限群の構造を解析する際に、様々な部分群がどのように交わり合っているかという情報は極めて重要なものである。そこで本研究ではそれを部分群からなる抽象単体複体として具体化し、そこから得られる表現（レフシェッツ加群）、代数構造（一般バーンサイド環）、ホモトピー不変量などに関する研究成果を得た。

研究成果の概要（英文）：
In order to study the structure theory of finite groups, it is quite important to investigate that how various subgroups of the group relate or intersect each other. Then we consider an abstract simplicial complex defined by inclusion chains of subgroups as simplices; which is called "subgroup complex". We obtained some results on the Lefschetz module, the generalized Burnside ring, or the homotopy invarinat associated to subgroup complexes.


交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００７年度 | ７００，０００ | 0 | ７００，０００ |
| ２００８年度 | ６００，０００ | １８０，０００ | ７８０，０００ |
| ２００９年度 | ６００，０００ | １８０，０００ | ７８０，０００ |
| ２０１０年度 | ６００，０００ | １８０，０００ | ７８０，０００ |
| 総　計 | ２，５００，０００ | ５４０，０００ | ３，０４０，０００ |


研究分野：有限群論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：群論


１．研究開始当初の背景
研究の動機、あるいは（遠い）目標の一つに有限単純群の分類定理がある。これは１９８０年代初頭に証明されたものであり、それによると有限単純群は １）素数位数の巡回群、２）５次以上の交代群、３）Lie 型の群、４）２６個の散在群 のいずれかに同型となる。ここで巡回群、交代群はまさにそれぞれ１つの系列であり１つの“タイプ”であると言って良い。そして Lie 型の群はファミリーの集まりではあるが、それらは Lie 代数や代数群を用いて統一的に良く理解されておりまさに１つの“タイプ”になっている。一方散在群はどうであろうか。通常上の様に一まとめに書いてしまうのであるが、しかしこれらは決して“散在タイプ”と１つにくくれる物ではない。誤解を恐れずに言うならば２６個が１つ１つ独立した“固有のタイプ”になっているのである。そこで分類定理完成直後から次の様な自然な質問が考えられてきた。「“２６タイプ”ある散在群の統一的な理解は存在するか？」「特に Lie 型の群の

“partial analogies”としての理解は存在するか？」このような背景の下で我々は特にLie 型の群に付随する幾何、即ち unipotent radical から定義される単体複体に着目する。さらに部分群複体そのものに関する一般論の整備、また部分群複体と表現・代数・幾何との関連を明らかにするという研究課題が設定される。

## ２．研究の目的

（１）《研究対象について》
有限群 G に対して C を G-共役で閉じている部分群の族とし D(C) を C に属する部分群による包含列全体の集合とする。このとき対 D(C):= (C,D(C)) には頂点集合 C, 単体集合 D(C) とする有限単体複体の構造が入る。我々はこの D(C) を群 G の部分群複体と呼ぶ。部分群複体は G-共役作用で閉じている勝手な部分群族 C を与えるごとに定義されるものである。特に非自明な p-部分群全体から成る Sp(G) は基本的である。また単体複体 D(C) の幾何学的実現である位相空間 |D(C)| を考えることにより |D(C)| のホモトピー型などを議論することが出来る。以下 D(C) と |D(C)| を同一視して区別しないことにする。

（２）《先行研究について》
① L を標数 p の体上で定義されている Lie 型の群とする。すると L に付随する幾何としてそのビルディング Bld(L) が良く知られており、これは L の構造論・表現論を良く反映している。そこで「散在群に対してビルディングの類似が存在するか？」と言う質問が自然に沸き起こる。一方 Bld(L) の著しいトポロジカルな性質として先に述べた部分群複体 D(Sp(L)) とのホモトピー同値性が挙げられる。これは巨大な複体 D(Sp(L)) に対して Bld(L) がその ″骨組み″ を与えていることに他ならない。そこでこのホモトピー同値性に着目すると先の質問は次の様に定式化出来る。

質問： G を勝手な有限群, p をその位数を割り切る素数とする。この時、対 (G,p) に付随する p-局所幾何 Dp(G) で部分群複体 D(Sp(G)) とホモトピー同値になるものは存在するか？　ただし Dp(G) はビルィングの概念を含むものとする。

　部分群複体のホモトピー変形に関するこれまでの研究成果の１つはこの質問を解決し、また今まで観察されていた現象論に数学的な説明を与えたことにある。ここで本質的な役割を果たすのが G の radical p-部分群全体からなる部分群族 Bp(G) とその複体 D(Bp(G)) である。D(Bp(G)) はビルディングの自然な拡張概念になっている。

② 群に付随する幾何を考える上で重要な複体は D(Bp(G)) であった。さらにその中でも“centric-part”D(Bpc(G)) が本質的な役割を果たしている。ここで Bpc(G) は中心が中心化群のシロー群を与えるような radical p-部分群全体からなる族である。しかし逆に考えると幾何を考える上では“non-centric-part”(Bp(G)- Bpc(G)) は暗に切り捨てられてしまっているのである。ところが部分群複体上の表現を考えることによってこれが面白い対象として復活してくる。まず D(Bpc(G)) に付随する被約レフシェッツ加群 L(G,p):=L(D(Bpc(G))) を考える。このときその次元で定義されるオイラー標数 χ(G,p) の p-部分 χ(G,p)p に対して次の事実が筆者により証明されている。

定理　V を (Bp(G)- Bpc(G)) に属する最大位数のものとするとオイラー標数 χ(G,p) は |G|p/|V| で割り切れる。

（３）《研究目的》
本本研究の目的は先に述べた表現に関する先行研究を踏まえて、次のように述べることが出来る。
① オイラー標数の p-部分 χ(G,p)p を制御している V は L(G,p) のある直既約因子の頂点の“候補”になることが分かっている。そこで V が実際に頂点として実現されるための表現論的、幾何学的条件を明らかにする。
② 現象論を見ると、この V は頂点のみならず G ある p-ブロックの不足群としても実現されている。同様に V が実際に不足群として実現されるための表現論的、幾何学的条件を明らかにする。
③ centric-part あるいは non-centric-part は p-radical Bp(G) を用いずにより一般的に取り出すことも出来る。そこでこの部分群族の表現論的解釈、さらには部分群複体 D(Bp(G)) などで記述されるモジュラー表現論のアルペリン予想やデイド予想との関連を明らかにする。
④ centric-part の幾何学的解釈に関しては、これまでの研究でほぼ明らかになったと言って良い。一方、non-centric-part の位相不変量などに関する幾何学的結果は何も明らかにされていない。これらの解明もここでの研究目的である。

## ３．研究の方法

（１）《具体的に扱う部分群複体について》
我々の最終目標の一つに散在型単純群の統一的な理解がある。その目標に向かってまず

標数 p の体上で定義されている Lie 型の群 L に付随する幾何 ビルディング Bld(L) に着目し「散在群に対してビルディングの類似が存在するか？」と言う質問が考えられてきた。この質問に対する最も重要な研究成果の１つに Ronan-Smith による散在群 G の 2-局所幾何 RS2(G) の構成がある。この RS2(G) は Bld(L) の類似物としての役割を十分に果たしており、現在では散在群の本質的な幾何の１つであると考えられている。しかし問題はその構成方法がそれぞれの散在群の部分群構造に依存した“Case-by-Case”であるということである。ところが我々の先行研究の中で着目している centric radical p-部分群複体 D(Bpc(G)) は Bld(L) の概念を含んでいるのみならず Ronan-Smith の幾何 RS2(G) の重要な部分も含んでいる。つまり G をマシュー群、コンウェイ群、モンスター群などの主要な散在群とすると我々の D(Bpc(G)) はまさに Ronan-Smith の幾何を与えているのである。以上の理由と我々の研究目的から、勝手な有限群 G とその位数を割り切る素数 p に付随する自然な幾何として D(Bpc(G)) を採用することが出来る。つまり部分群複体 D(Bpc(G)) が具体的な研究対象となる。

（２）《同じホモトピー型を持つ複体の考察》
この研究の主対象は複体 D(Bpc(G)) であるがその表現を考える際にはこのホモトピー不変量である被約レフシェッツ加群 L(G,p):=L(D(Bpc(G))) を取り扱う。つまり D(Bpc(G)) とホモトピー同値である別の複体を考えることにより、さまざまな視点から L(G,p) を考察することが出来るという利点を持っている。この研究についての興味ある手掛かりの一つとして D(Bp(G)) と D(Γp(G)) のホモトピー同値性を挙げることが出来る。ここで Γp(G) は G の位数 p の元全体を頂点とする可換グラフで D(Γp(G)) はグラフのクリーク複体である。つまり D(Bpc(G)) は D(Bp(G)) の部分複体であることから D(Bpc(G)) と同値な複体を D(Γp(G)) の中で捕まえる事が出来たら非常に面白い。なぜなら D(Γp(G)) は G の強く埋め込まれた部分群を導くなど有限群の構造論と深く関わっているからである。

（３）《被約レフシェッツ加群の直既約因子の考察》
ここで改めて被約レフシェッツ加群を振り返る。Fp を p 個の元からなる有限体とし D(C) を研究目的の欄で述べた群 G の部分群複体とする。G は共役によって D(C) 上に作用する。この作用による Fp-置換表現の各軌道内の単体次元に関する交代和を uL(G,C) と書く。この仮想加群を D(C) のレフシェッツ Fp[G]-加群と呼ぶ。さらに uL(G,C) に -1 次元分として -1 倍の自明加群を付け加えたものを D(C) の被約レフシェッツ Fp[G]-加群と呼び L(G,C) と書く。我々はこれまで L(G,p) の次元で定義されるオイラー標数 χ(G,p) の p-部分に関する研究を進めてきた。そして、そこから“non-centric-part”(Bp(G)- Bpc(G)) の最大位数の部分群 V の重要性が明らかになり、さらに V が L(G,p) の直既約因子の頂点としていつ実現されるかが新たな研究課題になってきた。しかし D(Bpc(G)) から作られる L(G,p) を見ているだけでは情報が非常に少ない。そこで前段落で述べた D(Bpc(G)) とホモトピー同値であるようなさまざまな複体 D(Γ) から定義される L(G,p) の直既因子あるいはその頂点を観察する。そしてその現象論を通して V が頂点として実現されるための表現論的または幾何学的な条件を突き止める。さらにこの V と G の不足群との関係も同時に明らかにする。

（４）《non-centric-part の幾何的な意味の特定》
non-centric-part X:=(Bp(G)- Bpc(G)) の特に最大位数の部分群に対して表現論的解釈は先に述べたように確かに存在している。では X 全体にはどのような意味が存在するのであろうか。具体的には D(X) のホモトピー型に元の群 G がどのように反映されているのかという課題である。さらにこの D(X) を p-radical Bp(G) を用いずにより一般的に取り出すことも出来る。この複体に関するホモトピー型の計算も試みる。

（５）《non-centric p-radical 部分群の存在理由の説明》
non-centric-part X:=(Bp(G)- Bpc(G)) は存在することもあれば、存在しないこともある。実際に我々のモデルケースである標数 p の体上の Lie 型の群 L に対する X は空集合である。つまり X の存在は Lie 型の群から外れた散在群特有の現象であり、即ち X の存在理由は散在群の存在理由に繋がってくるのである。これについては先に述べたレフシェッツ加群の研究と D(X) の研究から出てくる情報を用いながら同時進行で行う。

（６）《部分群複体を用いた群構造の解明》
部分群複体と群構造との関係についての重要な結果の一つとして Quillen の定理がある。即ち群 G に自明でない正規 p-部分群が存在するならば D(Sp(G)) は可縮であるという定理である。この様なタイプの定理は他にないものであろうか。例えば G の単純性の判定に部分群複体を用いることは出来ないであろうか。これについても先に述べたレ

フシェッツ加群の研究と D(X) の研究から出てくる情報を用いながら同時進行で行う。

４．研究成果

（１）《被約レフシェッツ加群の直既約因子の考察》

non-centric-part (Bp(G)- Bpc(G)) の最大位数の部分群 V が Bpc(G) の被約 レフシェッツ加群 L(G,p):=L(Bpc(G)) の直既約因子の頂点としていつ実現されるかが研究課題になっている。特に V が頂点として実現されるための必要十分条件は Sp(W) の被約レフシェッツ加群 L(Sp(W)) が非自明であることが先行研究によって分かっている。ここで W は V の G におけるワイル群とする。しかし単に L(Sp(W)) を見ているだけでは情報が非常に少ないため、Sp(W) と同じホモトピー型を持つ複体を見付け考察することを試みた。実際 V の極大性などを用いて Cp(G)(¥geq V) や Bpc(G)(¥geq V) などが Sp(W) とホモトピー同値になることが確かめられた。これらに付随するレフシェッツ加群の構造についての研究は継続中である。

（２）《部分群族に付随する一般バーンサイド環の考察》

有限群 G の一般バーンサイド環を実現させる部分群族の例はこれまでさほど多く見つかっていない。例えば一般に共通部分で閉じている族などの自明な例が知られている。しかし近年、山形大学の小田文仁氏によって p-centric 部分群全体からなる族 C が一般バーンサイド環を実現させることが指摘された。これは共通部分で閉じていない非自明な例である。この事実と部分群複体の観点から、次に興味が出てくる部分群族（あるいは複体）は p-根基部分群全体からなる R, あるいは先の C と R の共通部分で定義される CR である。しかし R および CR は共に少なくとも一般バーンサイド環を実現させるためのある十分条件を満たさないことが分かっている。しかしここでの研究成果は R や CR その物ではなく、それらの正規化部分群の族を考えることによって、その十分条件が満たされ、即ちその一般バーンサイド環が定義出来るというものである。ここでは同時にこの環構造の考察も行った。またこの結果は、我々の研究対象である部分群複体を一般バーンサイド環の観点から考察できる可能性を示唆している。

（３）《部分群族に付随する一般バーンサイド環とレフシェッツ不変量に関する考察》

G を有限群, Sgp(G) を G の部分群全体からなる族, Δ⊆Sgp(G) を G-共役の作用で閉じている G の部分群族とする。H∈Sgp(G) の G-共役部分群全体を (H) で表し、有限 G-集合 X を含む同型類を [X] で表す。さらに C(Δ) を Δ に属する部分群に対する G-共役類の全体とする。このとき {[G/H] | (H) ∈C(Δ)} を基底とする自由アーベル群を Ω(G,Δ) で表す。ここで Δ として全体の Sgp(G) をとると Ω(G):= Ω(G,Sgp(G)) は有限 G-集合の直積により可換環の構造が入る。これがいわゆる（通常）バーンサイド環である。一方、真の部分族 Δ⊂Sgp(G) に対して Ω(G,Δ) に環構造が入る場合があり、大雑把にいうとこれが“一般バーンサイド環”である。さて一般バーンサイド環を実現させる部分群族 Δ の具体例の一つとして self-normalizing な部分群がある。即ち H∈Sgp(G) に対して G における H の正規化群が H 自身であるようなものからなる Δ は Ω(G,Δ) に可換環の構造を与える。ここではそのような族 Δ から実現される Ω(G,Δ) を一般に考察した。その中の主要な結果の一つとして Δ に幾何的ないくつかの自然な条件を仮定すると Ω(G,Δ) の単位元が Δ に関するレフシェッツ不変量として実現されることを証明した。このように一般バーンサイド環と部分群複体の理論が密接に関係していることを明らかにした。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計３件)

①Fumihito Oda and Masato Sawabe
The generalized Burnside rings with respect to a collection of self-normalizing subgroups.
Journal of Algebra
査読有
2011 年　掲載予定

②Fumihito Oda and Masato Sawabe
A collection of subgroups for the generalized Burnside ring.
Advances in Mathematics
査読有
222 巻, 2009 年, 307-317 項

③Masato Sawabe
A note on finite simple groups with abelian Sylow p-subgroups.
Tokyo Journal of Mathematics
査読有
30 巻, 2007 年, 293-304 項

〔学会発表〕(計９件)

①澤邉正人
A collection of subgroups for the generalized Burnside ring

日本数学会秋期総合分科会
2009 年 9 月 27 日、
大阪大学

②澤邉正人
一般バーンサイド環のための新たな部分群の族
有限群のコホモロジー論とその周辺
2009 年 9 月 2 日、
信州大学

③小田文仁、澤邉正人
A collection of subgroups for the generalized Burnside ring
第 26 回代数的組合せ論シンポジウム
2009 年 6 月 25 日、
山形大学

６．研究組織
(1)研究代表者
澤邉　正人（SAWABE MASATO）
千葉大学・教育学部・准教授
研究者番号：６０３４６６２４