

平成 22年 5月 1日現在

研究種目： 若手研究(B)  
研究期間： 2007 ~ 2010  
課題番号： 19740009

研究課題名 (和文) ルート系に付随する多重ゼータ関数の研究とその応用

研究課題名 (英文) Multiple zeta functions associated with root systems and their applications

研究代表者

小森 靖 (Yasushi Komori)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教  
研究者番号：80343200

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：多重ゼータ、ルート系、ワイル群、特殊値、母関数

### 1. 研究計画の概要

量子ゲージ理論において、分配関数は最も基本的で重要な量であると考えられる。Witten は二次元コンパクト多様体上のコンパクトリー群による量子ゲージ理論の研究に際し、その分配関数の極限が、対応するリー群の有限次元既約表現の次元に関するディリクレ級数となることを見出した。当該研究はこの Witten ゼータ関数を含む「ルート系に付随する多重ゼータ関数」の解析によって種々のゼータ関数の総合的な理解を目指すものである。具体的には以下を目標とする。

(1) ルート系に付随する多重ゼータ値及びそれらの関係式、関数関係式の完全な理解。

(2) contour 積分の拡張を用いた、ルート系に付随する多重ゼータ関数の有理型関数としての理解。

(3) ルート系に付随する多重ゼータ関数理論の応用。

① ルート系に付随した Bernoulli 多項式を用いた多重  $L$  値及び値の関係式等についての研究。

② Riemann ゼータ関数論への応用。

③ Euler-Zagier 多重ゼータ値の関係式への応用。

④ 量子ゲージ理論への応用。

### 2. 研究の進捗状況

(1) ルート系に付随する多重ゼータ関数のベルヌーイ数およびベルヌーイ多項式の母関数を構成することに成功した。これによって平坦接続のモジュライ空間の体積が具体的に計算可能となった。また、ディリクレ指標を含む多重ゼータ値の計算も可能となり、いくつかの具体例を与えることができた。

(2) 一般の多重フルヴィッツ・レルヒゼー

タ関数に対して面積分表示を与えることに成功した。これによりこれらの関数の非正領域における挙動を詳しく調べることが可能となった。

(3) Eisenstein 級数の特殊値や、保型形式と密接な関連のあるラマニュジャンによる公式等に対し統一的な見方を与え、それら特殊値の母関数を構成した。また  $q$  ゼータ関数の正整数での特殊値も全く同様の方法で計算できることを示し、さらに Bernoulli 多項式の  $q$  類似を定義することができた。

(4) 多重ゼータ値のシャッフル積が、部分分数展開だけで与えられることを示した。これによってシャッフル積の展開とルート系の多重ゼータ値とが対応することが分かり、多重ゼータ値とシャッフル積との対応がより明確になった。またこの方法を用いることによって、extended double shuffle relation を積分を使わない形で再定式化することができた。

(5) Weng によるルート系に付随するゼータ関数について、統一的な方法により一般ルート系において証明することができた。この関数等式によってこのゼータに関するリーマン予想の証明へ大きく貢献できた。

### 3. 現在までの達成度

当初の計画以上に進展している。

当初の計画における内容に関しては上記のとおり順調に解明されてきており、また計画に無かった Weng ゼータ関数に関する研究なども進んでおり、計画以上の成果があったと考えている。

### 4. 今後の研究の推進方策

これまでの進捗状況から、研究計画通りの方法で進めていけばよいと考える。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Y. Komori, K. Matsumoto, H. Tsumura, Zeta and L-functions and Bernoulli polynomials of root systems, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 84, 57-62, 2008, 査読有 .

② Y. Komori, An integral representation of the Mordell-Tornheim double zeta function and its values at non-positive integers, Ramanujan J., 17, 163-182, 2008, 査読有 .

[学会発表] (計 14 件)

① Y. Komori, An integral representation of multiple zeta-functions., Journées autour des series de Dirichlet, 2007 年 11 月 13 日, Lille 1 University, France.

② Y. Komori, Multiple Bernoulli polynomials and multiple zeta functions of root systems, Elliptic integrable systems, isomonodromy problems, and hypergeometric functions, 2008 年 7 月 21 日, Max Planck Institute for Mathematics, Germany.

③ Y. Komori, Multiple Bernoulli polynomials and multiple L-functions of root systems, l'atelier Zeta III, 2009 年 11 月 23 日, Univ. Jean-Monnet, France.

⑤ 小森 靖, (G,P) に付随する Weng ゼータ関数の関数等式について, 代数的整数論とその周辺, 2009 年 12 月 9 日, 東京大学 .