様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２３年　４月１０日現在

機関番号：15201
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007～2010
課題番号：19740020
研究課題名（和文）虚二次体上のアーベル拡大体における岩澤理論と楕円単数

研究課題名（英文）Iwasawa theory for abelian extensions over imaginary quadratic fields and elliptic units

研究代表者
青木　美穂（AOKI MIHO）
島根大学・総合理工学部・准教授
研究者番号：10381451

研究成果の概要（和文）：代数体のイデアル類群に関する予想(Brumer 予想)と整数環の K 群に関する予想(Coates-Sinnott 予想)の関係について考察した．技術的な仮定の下，Brumer 予想から岩澤主予想を経由せずに Coates-Sinnott 予想を導く方法について考察し，論文「A note on the Coates-Sinnott conjecture, Bulletin of the London Mathematical Society 41, 613-620, 2009」にまとめた．また論文「On some exact sequences in the theory of cyclotomic fields, Journal of Algebra 320, 4156-4177, 2008」 では円分体の岩澤加群のプラスパートとマイナスパート両方に関係した，ある完全列の存在を証明した．さらに M. Kurihara, S. Mitchell によって得られていた p 分体の整数環の高次 K 群の構造に関する予想を p 冪分体に拡張した．さらに，有理数体または p 冪分体 L の整数環 O_L に対し，エタールコホモロジー群 H^2(Spec(O_L[1/p]), Z_p(i))(i≧2)の位数の明示式を円単数またはガウス和を用いて与えた．この結果は，Quillen-Lichtenbaum 予想を認めれば，整数環の偶数次K群の位数の明示式を与えたことになる． 研究の後半では，技術的な仮定のもと，一般の有理数体上のアーベル拡大体，さらに楕円単数を用いることにより虚二次体上のアーベル拡大体においても考察した．

研究成果の概要（英文）：I studied the relation between Brumer conjecture and Coates-Sinnott conjecture. The former is related to ideal class groups of number fields, and the latter is related to K-groups of the rings of integers. In my paper "A note on the Coates-Sinnott conjecture, Bulletin of the London Mathematical Society 41, 613-620, 2009" , I proved that the former conjecture implies the latter conjecture under some assumptions. In another paper "On some exact sequences in the theory of cyclotomic fields, Journal of Algebra 320, 4156-4177, 2008", I showed the existence of some exact sequences which relate both the plus part and the minus part of Iwasawa modules. Furthermore, I formulated some conjecture about K-groups of the rings of integers of cyclotomic fields, and described an order of etale cohomology groups by using cyclotomic units and Gauss sums. At the end of the study, I considered general abelian number fields and abelian extensions over imaginary quadratic fields.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	800,000	0	800,000
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	600,000	180,000	780,000
２０１０年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	2,600,000	540,000	3,140,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・代数学
キーワード：　イデアル類群，ガウス和，円単数，楕円単数，代数的Ｋ群，Brumer 予想，Coates-Sinnott 予想

１．研究開始当初の背景
イデアル類群などの代数的対象と，ゼータ関数などの解析的対象との関係について研究する岩澤理論は，有理数体上のアーベル拡大体においては，岩澤主予想や重要な予想が解かれており，だいぶ見通しが良くなっていた．しかし「有理数体上のアーベル拡大体である」という仮定を外すと，未だ多くのことが解決されていなかった．例えば，本研究当初では，岩澤主予想は虚二次体上のアーベル拡大体でさえ完全には解決されていなかった．本研究では有理数体上アーベル拡大体という仮定を外した場合（特に虚二次体上のアーベル拡大体）の岩澤理論の諸問題，古典的な整数論の予想と岩澤理論との相互関係について考察したいと考えていた．

２．研究の目的

(1) 有理数体上のアーベル拡大体以外の拡大(特に虚二次体)における岩澤理論の諸問題について考察する．

(2) 岩澤理論の他分野への応用として，特に代数的Ｋ理論への応用を考察する．

(3) 整数論では多くの予想が存在し，それらが密接に関係している．これらの関係について考察する．

(4) 論文「An algorithm for computing p-class groups of abelian number fields, Lecture Notes in Computer Science 4076, Springer , Berlin, 56-71, 2006」では有理数体上のアーベル拡大体のイデアル類群の計算アルゴリズムを考案した．このアルゴリズムを他の拡大体に拡張することを目的とする．

３．研究の方法
有理数体上のアーベル拡大における様々な問題は，ガウス和や円単数といった「代数的に良い元」が存在することによって具体的に解決できる．ガウス和や円単数の代わりに，楕円単数などの代数的な良い元を用いて，代数体のアーベル拡大体における岩澤理論について考察する．「代数的な良い元」は Kolyvagin によって見出された，代数的対象を解析対象を結びつけることの出来る Euler 系と呼ばれるものの公理を満たすと期待され，それにより岩澤主予想，及び岩澤理論の諸問題へのアプローチが可能になることが知られている．またガウス和，円単数，楕円単数などの具体的な表示が与えれている元は，具体例が計算しやすいといった利点がある．本研究では有理数体上の場合の円単数やガウス和を用いた手法を楕円単数や他の「代数的な良い元」に置き換えて，岩澤理論の諸問題を考察する．

４．研究成果

(1) 代数体のイデアル類群に関する予想(Brumer 予想)と整数環の K 群に関する予想(Coates-Sinnott 予想)の関係について考察した．F を総実代数体，L を F 上の有限次アーベル拡大体とする．Brumer 予想とは，F の部分ゼータ関数の s=0 の値から作られる Stickelberger 元と呼ばれる元が L のイデアル類群の annihilator になっていると主張するものである．F が有理数体の場合は，Stickelberger の定理と呼ばれ，解決されている．F が有理数体以外の場合は，L が CM 体の場合，L/F の拡大次数や岩澤 μ 不変量の仮定のもと，A. Wiles (On a conjecture of Brumer, Ann. of Math. (2) 131, 555-565, 1990) や C. Greither (Computing fitting ideals of Iwasawa module, Math. Z., 246, 733-767, 2004) らによって部分的に解決されている．一方，イデアル類群が 0 次の K 群の torsion 部分と同型になることから，高次 K 群の類似として Coates-Sinnott 予想が定式化されている．この予想に関しては，Quillen-Lichtenbaum 予想の下，F が有理数体の場合は Coates-Sinnott (An analogue of Stickerberger's theorem for the higher K-groups, Invent. Math. 24, 149-161, 1974), Nguyen Quang Do (Analogues superieurs du noyau sauvage, Semin. Theor. Nombres Bordeaux 4, 263-271, 1992) によって，F が有理数体以外の場合は，L が CM 体の場合，技術的な仮定の下，D. Buens -C. Greither (Equivariant Weierstrass preparation and values of L-functions at negative integers, Doc. Math. Extra Volume in honour of Kazuya Kato, 157-185, 2003) や G. Banaszak (Higher analogues of Stickelberger's theorem, C. R. Math. 337, 575-580, 2003) らによって部分的に解決されている．Brumer 予想と Coates-Sinnott 予想のアプローチは岩澤主予想を経由する方法が主流であるため，岩澤主予想が解かれている場合に多く

の結果がある．本研究では，Brumer 予想と Coates-Sinnott 予想の関係を岩澤主予想を経由せずに考察した．詳細な結果は以下の通りである(A note on the Coates-Sinnott conjecture, Bulletin of the London Mathematical Society 41, 613-620, 2009).

次の I～IV を仮定すると，Coates-Sinnott 予想の奇素数 p パートは正しい.
I. Quillen-Lichtenbaum 予想
II. 部分ゼータ関数において p の上の素点は除く.
III. 十分大きな m に対し，1 の p^m 乗根を L 添加した体において Brumer 予想は正しい.
IV. 局所体と大域体における 1 のべき根に関する仮定.

仮定 IV は，あるコホモロジーの localization map の cokernel が 0 になるために用いられている．その後の考察でこの cokernel を詳しく調べることで仮定 IV が外せることが分かった．今後はさらに他の予想との関連について考察する予定である.

(2) 円分体の岩澤加群のプラスパートとマイナスパート両方に関係した，ある完全列の存在を証明し，整数環の K 群の位数に関し応用した．詳細な結果は以下の通りである (On some exact sequences in the theory of cyclotomic fields, Journal of Algebra 320, 4156-4177, 2008).

① 完全列の存在について.
p を奇素数，F_m を有理数体に 1 の p ^ {m ＋１} 乗根を添加した体とする．また A_m を F_m のイデアル類群の p シロー部分群とする．岩澤加群 X とは A_m のノルムに関する射影極限をとったものである． F_{∞}=∪F_m に対し， cyclotomic 指標をガロア群の分解 Gal(F_{ ∞ }/ Q) ≅ Gal(F_0/Q) × Gal(F_{∞}/F_0)に伴い， ω×κと分解する．任意の非負整数 m,i， j に対し，岩澤加群 X の商 X_{i,j}^{(m)} =X^{ω^j}/(γ^{p^m}-κ^{1-i}(γ^{p^m}))X^{ω^j}を考える．(ここでγは Gal(F_m/F_0)の位相的生成元する.)
偶数 j に対し，次のガロア加群としての完全列が存在することを示した.

0→Hom_{Z_p}(X_{0,j}^{(m)}, Q_p/Z_p (1)) →A_m^{ω^{1-j}} →(U_m/I_m U_m)^{ω^{1-j}}→(U_m/G_m)^{ω^{1-j}} → 0

ここで，U_m, I_m, G_m はそれぞれ F_m の局所単数群，Stickelberger イデアル，ガウス和の成す群である．また，この完全列の射影極限をとることにより，無限次における完全列も得られた． この無限次の完全列から特に H. Ichimura (Local units modulo Gauss sums, J. Number Theory 68, 36-56, 1998) と T. Beliaeva (Unites semi-locales modulo sommes de Gauss, J. Number Theory 115, 123-157, 2005)が得ていた岩澤主予想の新しい定式化が導かれる．この完全列を一般化することが今後の課題である.

② K 群への応用.
岩澤理論の応用として，p 冪分体 L(p は素数)の整数環 O_L の高次 K 群の構造に関し考察した．整数環の K 群 K_n(O_L)は n=0 の時，有理整数環と L のイデアル類群との直和と同型であり，n=1 のときは L の単数群と同型になることが知られている．このことから代数体の整数環の K 群は代数的整数論において重要なイデアル類群や単数群の一般化と思うことができ，K 群のガロア群の作用込みの構造を求めることは重要である．まず，M. Kurihara (Some remarks on conjectures about cyclotomic fields and K-groups of Z, Compos.Math. 81, 223-236, 1992), S. Mitchell (On the Lichtenbaum-Quillen conjectures from a stable homotopy-theoretic view point, Algebraic Topology and Its Applications, Math. Sci. Res. Inst. Publ. vol. 27, Springer-Verlag, 163-240, 1994) 両氏によって得られていた p 分体の整数環の高次 K 群の構造に関する予想を p 冪分体に拡張した．この予想は，K 群とエタールコホモロジー群の間の自然な写像(Chern map)の同型(Quillen-Lichtenbaum 予想)と Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数の整数点の値に関する予想を仮定すると，代数的整数論の古典的な予想である Vandiver 予想と同値になる．さらに，Y. Hachimori -H. Ichimura (Semi-local units modulo Gauss sums, Mabuscrupta Math. 95, 377-395, 1998), T. Beliaeva (Unites semi-locales modulo sommes de Gauss, J. Number Theory 115, 123-157, 2005) らの研究を参考にし，有理数体または p 冪分体 L に対し，エタールコホモロジー群 H^2(Spec(O_L[1/p]), Z_p(i))(i ≧2)の位数の明示式を円単数またはガウス和を用いて与えた．この結果は，Quillen-Lichtenbaum 予想を認めれば，整数環の偶数次 K 群の位数の明示式を与えたことになる.

また以上の結果①，②を技術的な仮定を置き，一般の有理数体上のアーベル拡大体や虚二次体上のアーベル拡大体においても考察した.

〔雑誌論文〕（計 3 件）
①Miho Aoki, A note on the Coates-Sinnott conjecture, Bulletin of the London Mathematical Society 41, 613-620, 2009, 査読有
②Miho Aoki, On some exact sequences in the theory of cyclotomic fields, Journal of Algebra 320, 4156-4177, 2008, 査読有
③青木美穂, CM 体上の円分 Z_p 拡大と高次 K 群について, 第 2 回福岡数論研究集会報告集, 67-78, 2007, 査読無

〔学会発表〕（計 3 件）
①青木美穂, Brumer 予想と Coates-Sinnott 予想について, 談話会, 2010 年 11 月 8 日, 岡山大学
②青木美穂, K-groups of rings of algebraic integers and Iwasawa theory, 岩澤理ミニ勉強会, 2009 年 4 月 2 日, 京都大学
③青木美穂, CM 体上の円分 Z_p 拡大と高次 K 群について, 第 2 回福岡数論研究集会, 2007 年 8 月 29 日, 九州大学

６．研究組織
(1)研究代表者
青木　美穂（AOKI MIHO）
島根大学・総合理工学部・准教授
研究者番号：１０３８１４５１