

平成21年6月16日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007～2008

課題番号：19740021

研究課題名 (和文) 単純K3特異点のリンクについて

研究課題名 (英文) On the links of simple K3 singularities

研究代表者

片長 敦子 (KATANAGA ATSUKO)

四国学院大学・文学部教育学科・准教授

研究者番号：20373128

研究成果の概要：一つの多項式の零点集合を超曲面という。本研究では、複素超曲面上にある孤立特異点の位相幾何学的構造を明らかにすることを目的としている。孤立特異点の位相幾何学的構造を明らかにするとは、特異点の近傍で定義されるリンクと呼ばれる多様体の位相型を決定し、そのリンクの球面への埋め込まれ方を明らかにすることである。本研究対象である単純K3特異点は、複素3次元正規孤立特異点であり、その $\mathbb{Q}$ -分解的極小モデルの例外因子が既約な正規K3曲面であるような特異点として代数幾何学的には特徴付けられている。今回、島田伊知朗氏 (広島大) と共同研究により、ある超曲面単純K3特異点のリンクの微分位相型を完全に決定した。研究主結果は以下のとおりである。

研究主結果：非退化な超曲面単純K3特異点のリンクの微分位相型は、実2次元球面と実3次元球面の直積のいくつかの連結和になる。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	400,000	0	400,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	900,000	150,000	1050,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

## 1. 研究開始当初の背景

複素超曲面孤立特異点(以下、特異点という。)の位相幾何学的性質の研究は、1928年のブラウナー氏による複素1次元曲線の場合の研究から始まる。その後、ミルナー氏が開発したミルナー・ファイブレーションにより、特異点の位相幾何学的性質は、特異点のリンクの位相型とその球面への埋め込み方により決定されることが明らかになった。そして、このミルナー・ファイブレーションを詳しく調べることにより、特異点にまつわる多くの重要な事実が明らかになった。

複素2次元超曲面孤立特異点の場合は様々な観点から詳しく調べられている。特に、リンクの位相幾何学的性質は、特異点の良特異点解消の例外集合の双対グラフにより完全に決定されることが知られている。

一方、高次元においては、ブリスコーン氏による特異点のリンクとして現われるエキゾチック球面の驚くべき発見等があるが、主にリンクが球面になる場合に調べられており、高次元の孤立特異点の性質とそのリンクの位相型の対応はまだあまり明らかにされていなかった。

そこで研究代表者は、まず複素3次元超曲面孤立特異点のリンクについて注目した。中本氏との共同研究において、比較的扱いやすいブリスコーン・ファミ型多項式で定義された複素3次元超曲面对数的標準孤立特異点のリンクについて調べた。そこでは、まずリンクがスピ構造を持つことを証明することにより、スメール氏の「スピ構造を持つ閉実5次元多様体の微分位相型は、その整係数2次元ホモロジー群で決まる。」ことを本質的に用いた。そして、リンクの整係数2次元ホモロジー群を完全に決定するために、特異点のミルナー・ファイバーにおけるモノ

ドロミーの緻密な計算を行った。得られた主結果は次のとおりである。

(1) ブリスコーン・ファミ型多項式で定義された複素3次元超曲面对数的標準孤立特異点のリンクの微分位相型を完全に決定した。

(2) ある位数の整係数2次元ホモロジー群を持つ多様体は、ブリスコーン・ファミ型多項式で定義された複素3次元孤立特異点のリンクとして現れない。

(3) ブリスコーン・ファミ型多項式で定義された単純K3特異点のリンクの微分位相型は、実2次元球面と実3次元球面の直積のいくつかの連結和になる。

これらの研究をうけ、ブリスコーン・ファミ型多項式で定義された複素3次元超曲面孤立特異点のリンクに限らず、より一般の多項式である斉次多項式で定義される複素3次元超曲面孤立特異点について研究を進めることにした。なかでも非退化な超曲面単純K3特異点の定義多項式については、特異点の位相を決定する重要な部分が米村氏によって95通りに分類されている。そこで、この95個の非退化な超曲面単純K3特異点のリンクについて、その微分位相型を調べた。

米村氏によって分類されている非退化な斉次多項式のうちp型とq型と呼ばれる斉次多項式は、オーリック氏とランデル氏の結果から、リンクの整係数2次元ホモロジー群を計算するアルゴリズムが明らかになっている。そこで、中本氏との共同研究により計算プログラムを作り、95個のうち83個についてはリンクの整係数2次元ホモロジー群を計算することができた。しかし、95個の中にはp型とq型以外の型の定義多項式もあり、全てを決定するには至らなかった。

## 2. 研究の目的

上記の研究結果をうけ、研究代表者は以下の予想をたてた。

予想：非退化な超曲面単純K3特異点のリンクの微分位相型は、実2次元球面と実3次元球面の直積のいくつかの連結和になる。

本研究では、これまでとは違う新しい手法を開発することにより、予想を証明することを目指した。また、複素2次元特異点の場合において、リンクと例外集合との間に深い関係があったように、超曲面単純K3特異点のリンクの場合においても、特殊ではあるが、特異点のある解消で現われる正規K3曲面との間に何らかの関係があると予想した。従って、本研究の具体的な目的は以下のとおりである。

(1) 非退化な超曲面単純K3特異点のリンクの位相型の決定。

(2) 非退化な超曲面単純K3特異点のリンクの位相型とその $\mathbb{Q}$ -分解的極小モデルの例外因子として現れる既約な正規K3曲面との関係を明らかにする。

## 3. 研究の方法

前回の研究でも使われたスメール氏の結果が本質的に使われる。予想が正しいことを証明するためには、リンクの整係数2次元ホモロジー群が自由アーベル群であることを証明すればよい。しかし、1. 研究開始当初の背景 で述べたように、リンクの整係数2次元ホモロジー群を決定するためのモドロミーの計算はかなり複雑になり、定義多項式がある場合しか計算できていない。そこで本研究では、ある特異点の解消で現れる正規K3曲面の持つ特異点の情報を用いる

という新しい研究手法を開発した。

具体的には、まずダーフィー氏によって開発された代数多様体における特異点の近傍の理論を用いる。そしていくつかの完全系列を用いることにより、リンクの整係数2次元ホモロジー群が自由アーベル群であることを証明するためには、例外集合として現れる正規K3曲面の特異点から構成される格子がK3格子に原始的に埋め込まれていることを、ニクリン氏が構築した格子理論を用いて示せばよいことがわかった。

今回、その方面に詳しい島田伊知朗氏(広島大)の研究協力を得て、95個のうち92個までは格子理論を用いて、正規K3曲面の特異点から構成される格子が原始的に埋め込まれていることが証明できた。その後、残りの3個についても島田氏が楕円ファイバー空間の手法を用いて証明することに成功した。従って、米村氏によって分類されたすべての95個において、リンクの整係数2次元ホモロジー群が自由アーベル群であることが証明され、2. 研究目的 で述べた予想が正しいことが明らかになった。

## 4. 研究成果

島田伊知朗氏(広島大)と共同研究により、次の研究主結果が得られた。

主結果：非退化な超曲面単純K3特異点のリンクの微分位相型は、実2次元球面と実3次元球面の直積の $21-r(E)$ 個の連結和になる。

ただし、 $E$ は非退化な超曲面単純K3特異点の最小特異点解消であらわれる例外集合であり、 $r(E)$ は $E$ の全ミルナー数である。

現在、投稿に向けて研究成果をまとめている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計2件)

①発表者：片長 敦子

タイトル：The links of particular hypersurface simple K3 singularities

研究集会：「幾何学的視点からの特異点論」

発表年月日：2008年6月3日

発表場所：九州大学、

②発表者：片長 敦子

タイトル：Normal K3 surfaces associated with hypersurface simple K3 singularities

研究集会：幾何学コロキウム

発表年月日：2008年12月19日

発表場所：北海道大学、

6. 研究組織

(1) 研究代表者

片長 敦子 (KATANAGA ATSUKO)

四国学院大学・文学部教育学科・准教授

研究者番号：20373128

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：