

機関番号：16201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19740025

研究課題名(和文) 射影埋め込みによるラグランジアンファイブレーションの研究

研究課題名(英文) Study of Lagrangian fibrations via projective embeddings

研究代表者

野原 雄一 (NOHARA YUICHI)

香川大学・教育学部・講師

研究者番号：60447125

研究成果の概要(和文)：A型の旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系と呼ばれる完全可積分系をあるトーリック多様体上のトーラス作用の運動量写像に変形できることを証明した。さらにその応用として Gelfand-Cetlin 系のトーラスファイバーのポテンシャル関数を計算し、それが旗多様体のミラー対(Landau-Ginzburg モデル)のスーパーポテンシャルを与えることを示した(西納武男氏、植田一石氏との共同研究)。

2次元部分空間のなすグラスマン多様体に対してはそのトーリック退化がある種のグラフで分類されることが知られているが、それぞれのグラフに対してグラスマン多様体上の完全可積分系を構成し、それが対応するトーリック退化の下でトーリック多様体の運動量写像に変形できることを証明した。この結果から Kapovich-Millson によって構成された多角形空間(多角形のモジュライ空間)上の完全可積分系がトーリック多様体上の運動量写像に変形することも分かる。この多角形空間上の完全可積分系と、Goldmanにより構成された射影直線上の階数2の放物的ベクトル束のモジュライ空間上の完全可積分系の関係についても調べた。

研究成果の概要(英文)：I have proved that the Gelfand-Cetlin system, a completely integrable system on a flag manifold of type A, can be deformed into a toric moment map on a toric variety (this is a joint work with T. Nishinou and K. Ueda). As an application we computed the potential functions of the Lagrangian torus fibers of the Gelfand-Cetlin system, and showed that it coincides with the superpotential of the Landau-Ginzburg mirror of the flag manifold.

It is known that toric degenerations of a Grassmannian of two-planes in a complex vector space are classified by certain trees. For each such tree I have constructed a completely integrable system on the Grassmannian, and proved that it can be deformed into a toric moment map under the corresponding toric degeneration. This result implies that completely integrable systems on a polygon space constructed by Kapovich and Millson also admit deformations into toric moment maps. I have also studied a relation between Kapovich-Milson's integrable systems and Goldman's integrable systems on a moduli space of parabolic bundles of rank 2 on a projective line.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,100,000	630,000	3,730,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ラグランジアンファイブレーション、完全可積分系、ミラー対称性

1. 研究開始当初の背景

ラグランジアンファイブレーションとはラグランジュ部分多様体をファイバーとするシンプレクティック多様体のファイブレーションのことであり、完全可積分系がその典型例である。ラグランジアンファイブレーションはシンプレクティック幾何だけでなく幾何学的量子化やミラー対称性などの数理論理においても重要な幾何学的構造だが、ほとんどの場合に特異ファイバーを持つため、その存在の証明や構成は一般に難しい問題である。

アーベル多様体の場合にはラグランジアンファイブレーションとテータ関数の関係が良く知られている。アーベル多様体はテータ関数の基底を用いて射影空間に埋め込まれるが、報告者はその基底をうまく選ぶと、テータ関数の“振動数”（直線束の次数）が大きいとき、射影空間の標準的なラグランジアンファイブレーション（トーラス作用の運動量写像）がアーベル多様体のそれを Gromov-Hausdorff 距離で近似することを示した。同様のことをアーベル多様体の商である特異クンマー多様体に対しても証明した。

2. 研究の目的

アーベル多様体はラグランジアンファイブレーションが特異ファイバーを持たない非常に特別な例である。より一般のシンプレクティック多様体に対してラグランジアンファイブレーションを射影空間の運動量写像を用いて近似、または構成できるようになることが最終的な目標であるが、本研究ではその最初のステップとして主に旗多様体や Riemann 面上のベクトル束のモジュライ空間、 $K3$ 曲面などの具体的な場合にそのラグランジアンファイブレーションについて調べる。特にその退化の様子を詳しく理解することを目的とする。これらの空間はいずれも数学の様々な所に現れる重要な空間である。

3. 研究の方法

調べる対象の空間をトーリック多様体などのラグランジアンファイブレーションの構造が分かりやすい空間（一般には特異点を持つ）に変形（退化）させることにより研究する。旗多様体には Gelfand-Cetlin 系と呼ばれる完全可積分系が知られている。幾何学的量子化によりこれの対応物となる複素幾何的（または表現論的）対象は Gelfand-Cetlin 基底と呼ばれる表現の基底であるが、これと旗多様体のトーリック退化との関係が

Kogan-Miller らにより調べられている。本研究では Gelfand-Cetlin 系の幾何学を、トーリック退化を用いて調べる。また、Riemann 面上のベクトル束のモジュライ空間に対しては、Riemann 面の退化から誘導されるモジュライ空間の退化を考え、そのもとで Goldman により構成された完全可積分系の挙動を調べる。

4. 研究成果

- (1) 旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系があるトーリック多様体上のトーラス作用の運動量写像に変形できることを証明した（以下このような結果を完全可積分系のトーリック退化と呼ぶことにする）。さらにそれを正則円盤の数え上げに応用し、Gelfand-Cetlin 系のラグランジアントーラスファイバーに対してポテンシャル関数という量を計算し、それが旗多様体のミラー対（Landau-Ginzburg モデル）のスーパーポテンシャルを与えることを証明した。（西納武男氏、植田一石氏との共同研究。）この結果はシンプレクティック幾何的にも表現論的にも意義のあるものと考えられる。またこのポテンシャル関数の計算は（良い性質を持つ）トーリック退化があれば旗多様体以外にも適用できる手法である。
- (2) 複素ベクトル空間内の 2 次元部分空間のなすグラスマン多様体のトーリック退化はある種のグラフと一対一に対応していることが知られている。その各グラフに対してグラスマン多様体上の完全可積分系を構成し、それが対応するトーリック退化のもとで自然にトーリック多様体上の運動量写像に変形できることを示した。この結果は特別な場合として (1) の Gelfand-Cetlin 系のトーリック退化のグラスマン多様体の場合を含んでいる。
- (3) 多角形空間（3次元ユークリッド空間内の多角形のモジュライ空間）はグラスマン多様体のシンプレクティック簡約として得られることが知られている。上記のグラスマン多様体上の完全可積分系が Kapovich-Millson により構成された多角形空間上の完全可積分系を誘導することを示した。さらにグラスマン多様体上の完全可積分系のトーリック退化が Kapovich-Millson の完全可積分系のトーリック退化を誘導することも分かる。
- (4) 適当な条件の下で、多角形空間は射影直線上の階数 2 の放物的ベクトル束のモジ

ユライ空間とシンプレクティック同相であることが知られている。放物的ベクトル束のモジュライ空間上には Goldman の構成法で完全可積分系ができるが、これが上の同一視のもとで多角形空間上の Kapovich-Millson による完全可積分系と同一視できることを示した。多角形空間の場合のトーリック退化の結果と合わせることで Goldman の完全可積分系もあるトーリック多様体の運動量写像に変形できることが分かる。

旗多様体の場合のポテンシャル関数の計算は当初の予定にはなかったものであるが、これは計画以上に意義のある結果である。これに予定以上に時間を費やしたために K3 曲面の場合の研究には至らなかった。これは今後の課題としたい。グラスマン多様体や多角形空間の場合のポテンシャル関数の計算も今後考えるべき問題である。また放物的ベクトル束のモジュライ空間に対する結果は多角形空間を経由するものであり、また多角形空間との同一視も Kaehler 多様体ではなくシンプレクティック多様体としてのものであるため、複素構造の様子も含めてより直接モジュライ空間の退化を理解する必要があると思われる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, *Advances in Mathematics* 224, 648-706 (2010), 査読有
- ② Y. Nohara, Lagrangian fibrations and theta functions, "Noncommutativity and Singularities — Proceedings of French-Japanese symposia held at IHES in 2006", *Advanced Studies in Pure Mathematics* 55, 299-308 (2009), 査読有
- ③ Y. Nohara, Projective embeddings and Lagrangian fibrations of Kummer varieties, *Internat. J. Math.* 20, No. 5, 557-572 (2009), 査読有
- ④ 野原雄一, 旗多様体のトーリック退化と Gelfand-Cetlin 系, 数理解析研究所講究録 1613 「Bergman 核と代数幾何への応用」, 66-85 (2008), 査読無

[学会発表] (計 19 件)

- ① 野原雄一, Toric degenerations of polygon spaces and bending flows, 幾何学シンポジウム, 神戸大学, 2010 年 8 月 7 日
- ② 野原雄一, Toric degeneration of the

Gelfand-Cetlin system and its applications, Workshop: Lefschetz fibration and category theory, 大阪大学, 2010 年 6 月 5 日

- ③ 野原雄一, Gelfand-Cetlin 系のトーリック退化とその応用, トロピカル幾何と超離散系の新展開, 京都大学, 2010 年 3 月 12 日
- ④ Y. Nohara, Toric degeneration of Gelfand-Cetlin systems, The 2nd GCOE International Symposium on "Weaving Science Web beyond Particle-Matter Hierarchy", 東北大学, 2010 年 2 月 18 日
- ⑤ Y. Nohara, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, Workshop on Recent Advances in Mathematics at IPMU, IPMU, 東京大学, 2009 年 11 月 16 日
- ⑥ Y. Nohara, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, 第 15 回複素幾何シンポジウム, 信州菅平高原, 2009 年 11 月 2 日
- ⑦ 野原雄一, 旗多様体のトーリック退化と Gelfand-Cetlin 系, 2009 日本数学会秋季総合分科会 (特別講演), 大阪大学, 2009 年 9 月 25 日
- ⑧ Y. Nohara, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, Third International Conference on Geometry and Quantization, University of Luxembourg, 2009 年 9 月 10 日
- ⑨ 野原雄一, 旗多様体と Gelfand-Cetlin 多面体, 第 2 回シュレーベルト・カルキュラスとその周辺, 倉敷シーサイドホテル, 岡山県倉敷市, 2009 年 9 月 23 日
- ⑩ Y. Nohara, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, East Asian Symplectic Conference 2009, Academia Sinica, 台北, 2009 年 5 月 10 日
- ⑪ 野原雄一, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, Fusion of Integrable Systems and Geometry, 東北大学, 2009 年 4 月 17 日
- ⑫ 西納武男, 野原雄一, Lectures on Toric Degenerations, Potential Functions, and Gelfand-Cetlin systems, KIAS, ソウル, 2009 年 3 月 17 日
- ⑬ Y. Nohara, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, The 1st GCOE International Symposium "Weaving Science Web beyond Particle-Matter Hierarchy", 東北大学, 2009 年 3 月 7 日

- ⑭ 野原雄一, Gelfand-Cetlin 系のトーリック退化とポテンシャル関数, 幾何学シンポジウム, 弘前大学, 2008 年 8 月 23 日
- ⑮ 野原雄一, 旗多様体のトーリック退化と Gelfand-Cetlin 系, 「Bergman 核と代数幾何への応用」, 京都大学数理解析研究所, 2008 年 6 月 5 日
- ⑯ Y. Nohara, Toric degeneration of flag manifolds and the Gelfand-Cetlin system, The 3rd Geometry Conference for Friendship of Japan and China, 名古屋大学, 2008 年 1 月 28 日
- ⑰ 野原雄一, 旗多様体のトーリック退化と Gelfand-Cetlin 系, 研究集会「接触幾何, 特異点論およびその周辺」, 金沢大学サテライト・プラザ, 2008 年 1 月 24 日
- ⑱ Y. Nohara, Projective embeddings and Lagrangian fibrations of Abelian varieties and Kummer varieties (Lecture course), International School-Conference GEOMETRY and QUANTIZATION, Steklov Mathematical Institute, モスクワ, 2007 年 9 月 11~14 日
- ⑲ Y. Nohara, Projective embeddings and Lagrangian fibrations of Abelian varieties and Kummer varieties, Conference on Symplectic geometry, 京都大学数理解析研究所, 2007 年 7 月 24 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野原 雄一 (NOHARA YUICHI)

香川大学・教育学部・講師

研究者番号 : 60447125