

研究種目： 若手研究 (B)
 研究期間： 2007~2008
 課題番号： 19740026
 研究課題名 (和文) 多重葉層構造の位相的研究

研究課題名 (英文) Topological study of multi-foliations

研究代表者

野田 健夫 (NODA TAKEO)
 東邦大学・理学部・講師
 研究者番号： 90431618

研究成果の概要： 3次元多様体上の多重葉層構造と多重接触構造の存在問題について研究し、オイラー類が消えている平面場のホモトピー類はすべて全葉層 (すなわち互いに横断的に交わる葉層構造の三つ組) によっても双接触構造 (すなわち互いに横断的に交わり符号の異なる接触構造の組) によっても実現できることを示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
年度			
年度			
年度			
年度			
年度			
総計			

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： 位相幾何・葉層構造・全葉層・接触構造

1. 研究開始当初の背景

多重葉層構造の重要性は古くは 1961 年の小平・Spencer の研究等から指摘されており、その後 Anosov 力学系との関連を含めていくつかの重要な成果が知られてきた。

多重葉層構造を考えうる最も低い次元は 2次元であるが、この場合はトーラス上で横断的に交わる 1次元葉層構造の組だけなので、その性質はおおむね理解されている。これが 3次元になると事態は複雑になり、興味深い研究対象となる。Anosov 流と呼ばれる双曲的力学系に伴い現れる不変葉層からなる 2重葉層構造は Ghys, Barbot, Fenley らにより盛んに研究され、未だ完全な解明には

至らないもののさまざまな条件下で分類結果が出されてきた。また Anosov 流を一般化した射影的 Anosov 流にも不変 2重葉層構造が付随し、これについては浅岡正幸や私によって分類結果が得られている。

他方で力学系による不変性を仮定せずに多重葉層構造それ自体を対象とする研究も行われてきた。田村一郎、佐藤篤之、西森敏之による一連の研究では 3次元多様体上の単一の葉層構造で 2重葉層構造に昇格しない例、すなわちどのような葉層構造とも横断的に交わらない例を具体的に構成し、そうした例が任意の 3次元多様体上に存在することを示した。さらに佐藤は全葉層 (すなわち

3次元多様体上では3重葉層構造)に昇格しない2重葉層構造の例も構成している。こうした結果をみると多重葉層構造の存在には厳しい制約があるように思われるが、その一方で **Hardorp** は任意の3次元多様体上に全葉層が存在することを構成的に証明し、多重葉層構造の豊富さを明らかにした。以上により次のような二つの問題が浮き彫りになる。まず第一に、多重葉層構造(特に全葉層)の存在条件はどこまで柔軟なものであるかという問題がある。**Hardorp** の存在定理は大きな結果であるが、単一の葉層構造についてみると任意の3次元多様体の任意の平面場のホモトピー類に対し、それを実現する葉層構造が存在することが以前から知られており、これに対応する結果が多重葉層構造についても得られるか否かが重要な問題点となる。第二の問題は、特定の葉層構造を固定した際に、それが多重葉層構造に昇格するにあたっての障壁についてである。田村・佐藤・西森の結果ではいくつかの評価が与えられているが、固定する葉層構造が特殊なものであり、一般的な状況ではまだほとんどわかっていない。

これとは別に、葉層構造と接触構造との類似性が近年次々に指摘され興味を引いている。多重葉層構造に対応して多重接触構造(すなわち横断的に交わる接触構造の組)が自然に考えられるが、接触構造は正と負の符号を持つので符号を込めた組み合わせを考えねばならない。このうち符号の等しい接触構造の三つ組で互いに横断的に交わるものの存在は **Gonzalo** によって示されており、比較的容易に構成することができる。他方、符号の異なる二つの接触構造の組は双接触構造とよばれ、三松佳彦や **Eliashberg-Thurston** によって定式化されており、射影的 **Anosov** 流と自然な対応があることが知られていた。双接触構造の存在は多重葉層構造を摂動することによって示されるので、**Hardorp** の定理を経由すればすべての3次元多様体上に双接触構造が存在することが分かる。となるとより精密に平面場のどのホモトピー類が双接触構造で実現されるかという問題も自然に考えられ、この観点からも多重葉層構造の存在条件が重要であることが分かる。

2. 研究の目的

この研究の目的は多重葉層構造と多重接触構造のそれぞれの存在条件を明らかにした上で両者に明確な対応を見出し、また対応付けられた構造の位相的性質の類似性を直接的に導くことである。

3次元多様体の余次元1の葉層構造とは

各点で積分可能な接平面場とみなすことができ、反対に接触構造はいたるところ積分不可能な接平面場として特徴付けられる。これら二つの構造はこの様に正反対の特徴を持つのであるが位相的性質の研究において不思議と類似性が見出され、**Eliashberg** と **Thurston** は **confoliation** の概念を用いることによりその謎の一端を説明した。すなわち彼らは葉層構造が接平面場として接触構造によって近似されることを示したのである。

多重葉層構造とは同一多様体上に複数の葉層構造が横断的に交わっている構造のことをいい、とくに次元と同数の葉層構造からなる多重葉層構造を全葉層という。同様に多重接触構造は複数の接触構造が横断的に交わっているものとして定義される。接触構造は一般に正と負の符号を持つので状況はより複雑になり、符号が異なり横断的に交わる接触構造の組は特に双接触構造とよばれる。多重葉層構造と多重接触構造に関して最初に考えられる問題は存在問題である。多重葉層構造あるいは多重接触構造が存在するとき、それを構成する葉層構造または接触構造はすべて平面場として同一のホモトピー類に属することが容易に観察されるので、逆ほどのホモトピー類が多重葉層構造あるいは多重接触構造で実現されるかを明らかにしたい。特に多重葉層構造を構成すればそれに **Eliashberg-Thurston** の定理を適用して多重接触構造が得られるので(逆の手法は知られていない)、まずは多重葉層構造、特に全葉層の構成からアプローチする。

ここで多重葉層構造から多重接触構造を導くのに **Eliashberg-Thurston** の定理を経由すると両者の明示的な対応関係が見えなくなってしまう。そこで本研究では全葉層の構成技術を応用しつつ、**Eliashberg-Thurston** の定理を使わず具体的に多重接触構造を構成することも試みたい。

この過程において多重接触構造に現れる接触構造の符号の違いがより明らかになると期待される。例えば互いに横断的に交わる符号の等しい接触構造の三つ組の存在は全葉層を経由しない比較的容易な構成法が **Gonzalo** によって得られているが、符号が異なる場合は同様の方法が機能しない。こうした観点から同符号の場合と異符号の場合、そして符号のない多重葉層構造の性質を観察したい。

多重葉層構造と多重接触構造の存在が明確になったうえで、両者の性質の直接的な関連付けについても研究する。たとえば前述の結果は横断的に交わる葉層構造の組と双接触構造を連続パラメータで結びつけていると捉えることもできるが、このような方法で両者を関連付けることにより、おのおのの位相的性質を結びつけて多重葉層構造と多重

接触構造の統一的な理解を目指す。

3. 研究の方法

3次元多様体上の全葉層の一般的構成を目指す。そのためには田村・佐藤・西森、およびHardorpの研究においてもそうであったように、 $D^2 \times S^1$ 上のReeb成分とよばれる余次元1の葉層構造とそれに横断的な葉層構造を組み合わせた典型的な全葉層の成分をうまく利用する。3次元多様体の一般的構成法は数多く知られているが、 $D^2 \times S^1$ に同相な成分を使うとなると、絡み目に沿ったDehn手術による方法がまず挙げられる。事実、Hardorpによる全葉層の構成も $D^2 \times S^1$ 成分でのDehn手術を利用するものなのであるが、ただしこの構成法は手術の係数の調整ができず、Poincareのホモロジー球面を経由していることもあり実際に手術を行う絡み目が把握しづらいので直接的な改良は難しいと思われる。他方で田村・佐藤の論文で扱われている葉層構造は開本分解 (open book decomposition) に由来するもので、結果的には多重葉層構造に昇格しない例とはなるが、絡み目とDehn手術との両者の関連からも扱いやすい例である。そこで本研究ではHardorpによる全葉層の構成方法の細部を再検討し、開本分解に由来するような絡み目のDehn手術で扱いやすい葉層構造を用いて全葉層を作り直すことを試みる。

また双接触構造については、得られた全葉層のうちの2つをEliashberg-Thurstonの摂動定理によりそれぞれ正と負の接触構造で近似することにより構成する。さらにはこの摂動を注意深く観察することにより、得られた双接触構造の位相的性質をもとの全葉層をなす葉層構造の位相的性質に関連付けて導き出す。

4. 研究成果

任意の3次元多様体上の、オイラー類が消えている任意の平面場のホモトピー類に対し、それを実現する全葉層を構成した。

具体的にはまず、3次元球面上で三葉結び目 (trefoil knot) の管状近傍にReeb成分をもつような葉層構造を一つの要素とするような全葉層を構成した。これは全葉層のほんの一例にすぎないが、田村・佐藤による多重葉層に昇格しない例を少しだけ変形した形になっており、この違いは単一の葉層構造が多重葉層構造へ昇格することの障碍を探る今後の研究に手掛かりを与えるであろうと期待される。

次にこの全葉層の例を応用し、3次元球面

の任意の絡み目に対して、その管状近傍にReeb成分を持ち、さらにその絡み目で任意の偶数係数のDehn手術に対応できる葉層構造からなる全葉層を構成した。これでHardorpの定理が再証明されたことになる。ここで、任意の絡み目での任意の偶数係数Dehn手術が許容されことはすべての3次元多様体のすべてのスピン構造を全葉層によって実現できることを意味し、平面場のホモトピー類はスピン構造とHopf不変量によって分類されるので目標に大幅に近づいたことになる。

さらにHopf不変量の任意性も実現するために $D^2 \times S^1$ 上の全葉層であるプラグを構成し、自明な結び目の管状近傍にReeb成分を持つ全葉層はこのプラグを挿入することによりHopf不変量が ± 1 変化することを示した。以上により、任意の3次元多様体上の任意の平面場のホモトピー類が、オイラー類という自明な障碍を除いては全葉層で実現されることが示されたことになる。

この全葉層に関する存在定理とEliashberg-Thurstonの摂動定理をあわせると任意の3次元多様体上の任意の平面場のホモトピー類に、オイラー類が消えていれば双接触構造が存在することもすぐに示される。すなわち目指すホモトピー類にまず全葉層を構成し、それをなす3つの葉層構造のうち任意の2つをとってそれぞれ正と負の接触構造に変形すれば、摂動によりホモトピー類は変わらず横断性も保たれるので双接触構造を得るのである。

この研究ではさらに接触構造の位相的性質にも着目した。接触構造はtightなものと同旋 (over-twisted) なものに分類されるが、Reeb葉層の接触構造への摂動を調べることにより、全葉層の構成においてある種のReeb成分を含ませれば必ず過旋なものからなる双接触構造を構成できることまでわかった。なおtightなものからなる双接触構造については具体例は知られているが一般的な構成法はまだ分かっていない。ちなみに単一のtight接触構造は各3次元多様体上有限個の平面場のホモトピー類にしか存在しないことが知られているので、これらがすべて双接触構造として実現されるか否かは今後の課題として興味深い。

以上の結果すべては浅岡正幸とE. Dufraineとの共著論文としてまとめて学術誌に投稿し、査読者の助言に従い改稿ののち再投稿した。

今後の展望としては、全葉層の存在定理が解決したのでより定性的な研究に向かいたい。全葉層を一般的に構成するためにReeb成分を多用したが、単一の葉層構造の研究においてもReeb成分を許せばより自由度の高い葉層構造が構成でき、逆にReeb成分を持

たない葉層構造を構成するには多様体の位相的条件の制約を強く受けることが知られている。そこで Reeb 成分を持たない3つの葉層構造からなる全葉層や、Reeb 成分を持たないものを含む全葉層を考えたときにその存在が以下に制限されるかなど、多様体の性質を反映する全葉層とは何かを探求していくべきであろう。

また、より高次元での多重葉層の存在問題が今後問われていくべきである。今回の研究手法は3次元多様体の性質に密着したものであるため単純な高次元化は望めないが、最近 Vogel によって平行化可能なすべての4次元多様体上に Engel 構造が存在することが示されたことは注目に値する。というのも全葉層が存在する多様体は必然的に平行化可能であり、また Engel 構造は3次元における接触構造の4次元版に当たるとも解釈できるものである。Vogel は非特異 Morse-Smale 流に伴って現れる round handle decomposition を利用しており、この手法が4次元の全葉層の研究の端緒となることは期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計 1 件)

野田健夫, 双接触構造の存在について, 研究集会「接触幾何、特異点論およびその周辺」, 2008年1月23日, 金沢大学サテライトプラザ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野田 健夫 (NODA TAKEO)

東邦大学・理学部・講師

研究者番号: 90431618

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者