

平成 21 年 5 月 21 日現在

研究種目：若手研究 (B)
 研究期間：2007～2008
 課題番号：19740028
 研究課題名 (和文) 四元数的正則幾何による複素平面内のラグランジュ曲面の研究
 研究課題名 (英文) Study on Lagrangian surfaces in the complex Euclidean plane in terms of quaternionic holomorphic geometry
 研究代表者
 守屋 克洋 (MORIYA KATSUHIRO)
 筑波大学・大学院数理物質科学研究科・助教
 研究者番号：50322011

研究成果の概要：二つのラグランジュ曲面の商を用いて、複素ユークリッド平面内のラグランジュ曲面の商が定義できる場合に、分母にあらわれるラグランジュ曲面を分類した。ハミルトンの極小ラグランジュ曲面の場合に具体的な公式を得て、それを用いてハミルトンの極小ラグランジュ曲面の構成をおこなった。ここで用いた技術を拡張して、四次元ユークリッド空間内の超共形曲面と四次元複素ユークリッド空間内複素正則零曲線の明示的な対応を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	800,000	0	800,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,400,000	180,000	1,580,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：曲面、部分多様体、四元数的ベクトル束、四元数的正則構造、四元数的平坦接続、可積分系、共形幾何学、シンプレクティック幾何学

1. 研究開始当初の背景

四元数を用いた曲面の理論の定式化について、次のような論文が発表されていた：

・ Leschke, K. ; Pedit, F. Bäcklund transforms of conformal maps into the 4-sphere. PDEs, submanifolds and affine differential geometry, 103--118, Banach Center Publ., 69, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2005.

・ Leschke, K. ; Pedit, F. ; Pinkall, U. Willmore tori in the 4-sphere with

nontrivial normal bundle. Math. Ann. 332 (2005), no. 2, 381--394.

・ Burstall, Francis ; Pedit, Franz ; Pinkall, Ulrich. Schwarzian derivatives and flows of surfaces. Differential geometry and integrable systems (Tokyo, 2000), 39--61, Contemp. Math., 308, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

・ Kamberov, George ; Norman, Peter ; Pedit, Franz ; Pinkall, Ulrich .

Quaternions, spinors, and surfaces. Contemporary Mathematics, 299. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. x+138 pp.

• Burstall, F. E. ; Ferus, D. ; Leschke, K. ; Pedit, F. ; Pinkall, U. Conformal geometry of surfaces in S^d and quaternions. Lecture Notes in Mathematics, 1772. Springer-Verlag, Berlin, 2002. viii+89 pp.

• Ferus, D. ; Leschke, K. ; Pedit, F. ; Pinkall, U. Quaternionic holomorphic geometry: Plücker formula, Dirac eigenvalue estimates and energy estimates of harmonic 2-tori. Invent. Math. 146 (2001), no. 3, 507—593.

• Pedit, Franz ; Pinkall, Ulrich . Quaternionic analysis on Riemann surfaces and differential geometry. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 389—400 (electronic).

球面とその上のリーマン計量の組で、リーマン計量が標準球面のリーマン計量と共形的である球面を、共形球面という。最後にあげた論文で、四次元共形球面内の曲面は複素正則関数もしくは複素有理型関数の類似物とみなせることが、すでに知られていた。そこで、複素正則関数の類似物としての曲面の研究をすすめることを考えた。研究を開始したところは研究手法が整備されておらず、研究対象とする曲面も、上の文献では、四次元共形球面内のウィルモア曲面が主であった。ウィルモア曲面とは、四次元共形球面内の曲面の共形普遍的なエネルギーについての汎関数の臨界面である。

2. 研究の目的

新しい観点を導入して、研究分野を新しく作ることが目的である。新しい観点として、曲面と複素正則関数の類似を採用し、一般の曲面の、複素正則関数との類似性質を明らかにする。そのために、曲面のなかでより複素正則関数と類似していると思われる、複素ユークリッド平面内のラグランジュ曲面の、正則関数との類似性質を明らかにする。ラグランジュ曲面とは、接平面に複素ユークリッド平面のケーラー構造を制限すると零になるような曲面である。これをもとに、将来の四次元共形球面内のウィルモア曲面の研究につなげる。

3. 研究の方法

曲面の共形幾何学の四元数を用いた定式化を用いる。リーマン面から複素ユークリッド平面への写像は、複素ユークリッド平面内の曲面はリーマン面上の四元数的自明直線束の切断とみなせる。四元数的自明直線束の四元数的線形な自己同型束の切断で、二回作用させると恒等切断を -1 倍したものを固定する。これを複素構造として、四元数的自明直線束の正則構造を定義して、その正則構造に関して正則な切断が、共形曲面となる。同じ複素構造に関して正則な曲面の集合は四元数的ベクトル空間になる。さらに商が、一般的には別な複素構造に関する正則切断、すなわち曲面となる。以上のことが Pedit と Pinkall による 1998 年の論文で示されている。複素構造が定数切断であるときに複素正則写像となる場合で、一般には複素構造はリーマン面から二次元球面への写像とみなされる。複素正則写像である場合と一般の曲面の場合の中間の位置にあるものとして、複素構造が、リーマン面から二次元球面の大円への写像になる場合がある。これが曲面がラグランジュ曲面である場合である。商はラグランジュ曲面には必ずしもならないが、商を具体的に計算することによって、ラグランジュ曲面になる場合に分母がみたす方程式を求めることができ、これを解析することが可能になる。

以上は四元数値関数の商を考える場合であるが、同様に四元数値一次微分形式の商を考えることができる。これは、リーマン面上の四元数化した余接空間の二つの切断の間の変換関数を考えることに対応する。二つの四元数値一次微分形式がそれぞれ同じ複素構造に関する二つの曲面の微分であるとき、変換関数は、曲面の複素構造を -1 倍した複素構造に関する曲面となる。これは極小曲面のワイエルシュトラス表現公式の、一般の曲面への拡張の、特殊な場合となっている。極小曲面は、面積汎関数の臨界面となっている曲面である。極小曲面の複素構造の -1 倍は超共形曲面の複素構造となるので、これを用いて極小曲面と超共形曲面の対応を調べることができる。超共形曲面とは、共形曲面で、曲率楕円が円となる曲面のことであり、ウィルモア・エネルギーが零になる曲面として特徴づけられる。

4. 研究成果

二つのラグランジュ曲面の商を用いて、複素ユークリッド平面内のラグランジュ曲面の商が定義できる場合に、分母にあらわれるラグランジュ曲面を分類した。ハミルトンの極小ラグランジュ曲面の場合に具体的な公式を得て、それを用いてハミルトンの

極小ラグランジュ曲面の構成をおこなった。ハミルトンの極小なラグランジュ曲面とは、ラグランジュ曲面で、変形ベクトル場がハミルトンのベクトル場となるような任意の変形にたいして面積汎関数の臨界曲面となる曲面である。ここで用いた技術を拡張して、四次元ユークリッド空間内の超共形曲面と四次元複素ユークリッド空間内複素正則零曲線の大域的で明示的な対応を得た。四元数を用いた定式化は可積分系との関連と関数論との関連の二面ある。現在は可積分系と関連の研究に研究者が集中していて、ウィルモア曲面が研究され、ウィルモア・エネルギーが最小な輪環面はクリフォード輪環面であるというウィルモア予想に関する研究が活発になされている。本研究は関数論との関連としては最近の唯一の進展といえる。ラグランジュ曲面の商についての研究の過程で、極小曲面の商は極小曲面の商にはならないことが判明し、曲面の商で、曲面の幾何学的性質を保つものは限定されることが分かった。したがって曲面の商がもとの曲面とことなる性質をもつ場合が興味深いことになるが、その例として、超共形曲面と極小曲面をあげることに成功した。超共形曲面と複素正則零曲線は次の論文で同時期に同じ結果が得られている。

・ M. Dajczer and R. Tojeiro, 'All superconformal surfaces in R^4 in terms of minimal surfaces', *Math. Z.* (4) 261 (2009).

この論文では、四元数を用いた定式化は使っていない。その結果、より長い証明を必要としていて、結果として、四元数を用いた定式化の優秀さをはかる比較対象となっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Katsuhiro Moriya, Super-conformal surfaces associated with null holomorphic curves, *Bull. London Math. Soc.* 41 (2): 327—331 (2009). 査読有り
- ② 守屋克洋, 複素ユークリッド平面内のラグランジュ曲面の面積についての不等式, *数理解析研究所講究録* 1623: 30—34 (2009). 査読無し
- ③ Katsuhiro Moriya, The denominators of Lagrangian surfaces in complex Euclidean plane, *Annals of Global Analysis and Geometry* 34 (1): 1—20

(2008). 査読有り

- ④ 守屋克洋, 複素平面内のラグランジュ曲面の分数表示, *数理解析研究所講究録* 1577: 36—44 (2008). 査読無し

[学会発表] (計 10 件)

- ① 守屋克洋, 四次元共形球面内の共形曲面と四元数的正則構造, 日本数学会年会特別講演, 2009/03/26, 東京大学駒場キャンパス
- ② 守屋克洋, 四元数的ユークリッド空間内の全複素部分多様体, 四元数的構造と関連分野, 2009/03/24, お茶の水女子大学
- ③ Katsuhiro Moriya, Super-conformal surfaces in the Euclidean four space in terms of null complex holomorphic curves, *Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization*, 2008/12/19, 大阪市立大学
- ④ 守屋克洋, 平坦四元数的接続と複素平面内のハミルトン極小ラグランジュ輪環面, 第 55 回幾何学シンポジウム, 2008/08/24, 弘前大学
- ⑤ Katsuhiro Moriya, A flat quaternionic connection for a Hamiltonian stationary Lagrangian torus in the complex Euclidean plane, *GEOSOCK セミナー: 「幾何学と可視化」*, 2008/07/02, 大阪市立大学
- ⑥ 守屋克洋, 複素ユークリッド平面内のラグランジュ曲面の面積についての不等式, 部分多様体の微分幾何学およびその周辺領域の研究, 2008/06/24, 京都大学数理解析研究所
- ⑦ Katsuhiro Moriya, Hamiltonian stationary Lagrangian tori in complex Euclidean plane with the rational spectral curve, *清華大学数学科学系学術報告*, 2007/12/06, 清華大学 (中国)
- ⑧ Katsuhiro Moriya, Super-conformal immersions and null-holomorphic curves, *清華大学数学科学系学術報告*, 2007/12/05, 清華大学 (中国)
- ⑨ Katsuhiro Moriya, Introduction - Quaternionic formalism for surfaces in R^4 and S^4 , *清華大学数学科学系学術報告*, 2007/12/04, 清華大学 (中国)
- ⑩ 守屋克洋, 複素平面内のラグランジュ曲面の分数表示, 部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり, 2007/07/12, 京都大学数理解析研究所

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~moriya>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

守屋 克洋 (MORIYA KATSUHIRO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・

助教

研究者番号：50322011

